解答例

STEP II 見本問題、第 13 問

力学 ・ つり合いとモーメント

> **STEP II 見本問題、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q13

鍵となる考え方

オレンジが崩れるとすれば、それは房が外側へ倒れることによってであり、各房は球がテーブルに接するただ一点を支点として回転する。そこで、オレンジをその切り分け面の一つに沿って二つに切り、一方の半分について、その最下点を通る水平な直線のまわりの力のモーメント（moment）を考える。半分にはたらく重力はそれを倒そうとし、それを引き止められるのはリボンだけであって、ほかには何もない。もう一方の半分から受ける力は状況を悪くすることしかできず、これが「少なくとも」の由来である。

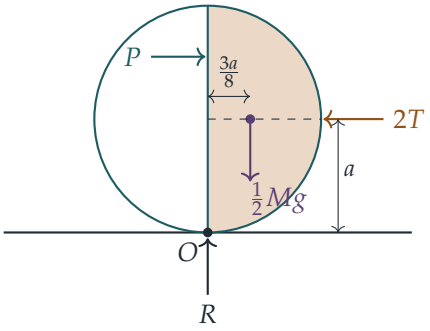
解答

モデル

チョコレートを一様な剛体（rigid body）とみなし、リボンは軽く、一周にわたって同じ張力（tension）T をもつとする。また、房は合同で、その数は偶数である（実際のチョコレートオレンジには 20 個ある）とする。すると、軸を通る一つの切り分け面によってオレンジは二つの半分に分かれ、それぞれは角 π の半球形のくさびとなる。最後に、切り口の面がなめらかであれば、この議論は房をどのようにまとめても成り立つことを見る。

球はテーブルとただ一点 O、すなわち軸の下端で接する。O を原点とし、z 軸を鉛直上向き、x 軸を水平で、軸から考察する半分の側（図の右半分）へ向かう向きにとる。分割面は $x = 0$ である。ℓ をこの面内にあって O を通る水平な直線（y 軸）とする。ℓ のまわりのモーメントを考え、半分を軸から離れる外向きに倒そうとするモーメント

を正とする。



一方の半分にはたらく力

右半分の質量は $\frac{1}{2}M$ であり、それにはたらく外力は次のとおりである。

- **重力** $\frac{1}{2}Mg$。重心（centre of mass）にはたらく。与えられた結果に $2\theta = \pi$ を代入すると、重心は軸から
$$\frac{3\pi a \sin(\pi/2)}{16(\pi/2)} = \frac{3a}{8}$$
の距離にあり、$x > 0$ の側にある。ℓ のまわりのそのモーメントは $\frac{1}{2}Mg \cdot \frac{3a}{8} = \frac{3}{16}Mga$ で、倒す向きである。

- **テーブル**：垂直抗力（normal reaction）と、場合によっては摩擦力（friction）。これらはすべて O にはたらく。O は ℓ 上にあるので、これらの ℓ のまわりのモーメントは o である。

- **リボン**。赤道の半分に巻きついている。幅の狭いリボンは表面を垂直に押し、その力は単位長さあたり T/a である（なめらかな曲線にかけた糸と同様である）。角 $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ までの弧において、x 成分を合計すると、軸へ向かう向きに
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{T}{a} \cos\phi \, a \, \mathrm{d}\phi = 2T$$
となり、y 成分は対称性により打ち消し合う。（同じことであるが、リボンを分割面と交わるところで切ってもよい。切った両端はそれぞれ $-x$ 方向に張力 T で引くので、やはり $2T$ となる。）この力はすべて水平で高さ a にはたらくので、ℓ のまわりのモーメントは $2T \cdot a$ で、元に戻す向きである。

- **もう一方の半分**。平らな面 $x = 0$ を通してはたらく。これだけが厄介な力であるが、その分布を知る必要はない。

考えてみよう もう一方の半分からの力が、半分が倒れるのを助けることしかできないのはなぜか。

面の各微小部分にはたらく力を、面に垂直な成分と面に沿った成分（切り口の面が粗い場合の摩擦力）に分ける。

- 垂直な成分は x 方向である。二つの半分は押し合っているだけで、接着されてはいないので、この成分は押す力であり、$+x$ 方向を向く。これはある高さ $z \geq 0$ にはたらくので、ℓ のまわりのモーメントはその大きさの z 倍であり、決して負にならない。つまり、半分を外向きに倒そうとする。
- 面に沿った成分はすべて平面 $x = 0$ 内にあり、この平面は ℓ も含む。作用線（line of action）が ℓ と同じ平面内にある力は、ℓ と交わるか ℓ に平行であるかのどちらかなので、ℓ のまわりのモーメントは 0 である。

したがって、接触の詳細がどうであれ、もう一方の半分は倒す向きに合計 $P_{\text{mom}} \geq 0$ のモーメントを与える。

ℓ のまわりのモーメント

半分はつり合っているので、ℓ のまわりのモーメントの総和は 0 である：

$$2Ta = \tfrac{3}{16}Mga + P_{\text{mom}}.$$

$P_{\text{mom}} \geq 0$ であるから、

$$2Ta \;\geq\; \tfrac{3}{16}Mga, \qquad \text{よって} \qquad T \;\geq\; \tfrac{3}{32}Mg,$$

となり、示すべきことが得られた。等号が成り立つのは、二つの半分が互いにまったく力を及ぼし合わず、かろうじてまとまっているときに限る。

房の数が偶数でない場合

代わりに切り口の面がなめらかであるとすれば、いくつかの房を丸ごと集めてできる角 2θ の任意のくさびについて同じ計算ができる。x をその対称面に沿ってとり、ℓ を O を通りその対称面に垂直な水平な直線とする。くさびの重力は $\frac{\theta}{\pi}Mg$ で、距離 $\frac{3\pi a \sin\theta}{16\theta}$ のところにはたらくので、倒すモーメントは $\frac{3}{16}Mga\sin\theta$ となる。その弧の上のリボンは高さ a で内向きに $2T\sin\theta$ の力で引く。なめらかな面は面に垂直な水平の押す力しか与えず、これらの $+x$ 方向の成分は負でないので、やはり倒すモーメントを増やすだけである。よって $2Ta\sin\theta \geq \frac{3}{16}Mga\sin\theta$ であり、$\sin\theta$ が約分されて再び $T \geq \frac{3}{32}Mg$ が得られる。どのように房をまとめても、限界は同じである。

検算

- 与えられた重心の結果で $2\theta = \pi$ とすると $\frac{3a}{8}$ となり、これはよく知られた、平らな面から測った中身の詰まった半球の重心である。モンテカルロ法（Monte Carlo method）による推定では、半分について $0.376a$ が得られ、ほかのくさびの角についても公式と一致する。
- 角 2θ の弧にわたってリボンの垂直な力を数値的に合計すると $2T\sin\theta$ となり、たとえば半分では $2T$ である。
- 限界 $\frac{3}{32}Mg \approx 0.094Mg$ は、調べたすべてのくさびの角（$2\theta = 0.6,\ \pi,\ 2.4,\ 5$）で同じになる。オレンジ全体だけで決まり、どう切り分けるかによらない限界が得られるのは心強い。
- 単位：モーメントは力と長さの積であり、a が約分されて力が残る。

よくある間違い

- 球の中心や赤道上の点のまわりのモーメントを考えること。そうすると、テーブルからの、あるいはもう一方の半分からの未知の力が式に入ってしまう。点 O を選ぶのは、まさに O を通る直線のまわりではテーブルからの力のモーメントが 0 になるからである。
- リボンが半分に及ぼす力を T とすること。リボンは半分の弧の両端を引くので、合力（resultant）は $2T$ である。
- 根拠なしに二つの半分の間の力を 0 とおくこと。そうすると等号が得られてしまう。「少なくとも」は、この力が押すことしかできないと気づくことから生じる。

STEP のその先へ

これは未知の内力を含む静力学（statics）の問題であり、求められない未知量を消すような軸を選び、残りは不等式（接触力は押すだけで引くことはない）を使って処理している。同じ考え方は石造りのアーチやドームの解析の背後にもあり、そこでは、構造物が立っていられるのは、材料の内部にとどまる推力線が見つかる場合に限られる。重心の結果そのものは球面極座標（spherical polar coordinates）による標準的な三重積分であり、ぜひ自分で導いてみる価値がある。剛体のつり合いについてさらに学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。