解答例

STEP II 見本問題、第 12 問

力学 ・ 針金上の振動

STEP II 見本問題、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

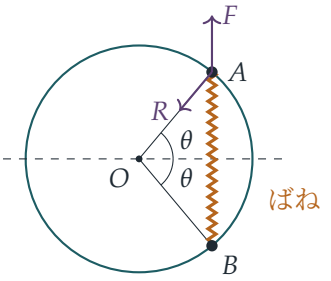
step.maths.org/questions/spec-s2-q12

鍵となる考え方

針金はなめらかなので、仕事をする力はばねの力だけであり、力学的エネルギー（mechanical energy）が保存される。必要なのは、θ を用いて表したばねの長さ（円の弦（chord）である）と、各ビーズの速さだけである。少し考えておくべき点が二つある。角 AOB を二等分する直線はなぜ動かないのか。また小問 (ii) で、ビーズが直径の両端に達するだけのエネルギーをもつ場合には何が起こるのか。

解答

ビーズを、水平面内に置かれたなめらかな円形の針金上の質点とみなし、それらはフックの法則（Hooke's law）に従う軽いばねでつながれているとする。重力は鉛直方向にはたらき、針金からの抗力の鉛直成分とつり合うので、水平面内の運動には関与しない。



図において、F はばねが A を押す力（ばねは最初縮んでいるので BA の向き）であり、R は針金が A に及ぼす抗力の水平成分である。

エネルギーの式を立てる

各ビーズの位置を円周上の角で表す。A は角 ϕ_A、B は角 ϕ_B の位置にあるとする。

> **考えてみよう** 両方のビーズが、固定された直線に関して対称に、同じ速さで動くと仮定してよいのはなぜか。

O を通る鉛直軸のまわりのモーメント（moment）を考える。A と B にはたらくばねの力は大きさが等しく向きが逆で、同一直線 AB 上にはたらくので、それらのモーメントは打ち消し合う。各ビーズにはたらく針金の抗力の水平成分 R は針金に垂直なので、O を通る半径の方向を向き、モーメントをもたない。鉛直な力は鉛直軸のまわりのモーメントをもたない。したがって角運動量（angular momentum）$ma^2(\dot{\phi}_A + \dot{\phi}_B)$ は保存される。ビーズは静止状態から放されるので角運動量は初めゼロであり、よって $\phi_A + \phi_B$ は一定に保たれる。すなわち、角 AOB の二等分線（bisector）は動かない。これを図の破線にとれば、$\phi_A = \theta$、$\phi_B = -\theta$ となる。このとき各ビーズは速さ $a\dot{\theta}$ で動く。

ばねは弦 AB であり、その長さは $2a\sin\theta$ である。自然長（natural length）は $2a\sin\alpha$ なので、伸びは $x = 2a(\sin\theta - \sin\alpha)$ であり、弾性エネルギー（elastic energy）は

$$\frac{\lambda x^2}{2\cdot 2a\sin\alpha} = \frac{4\lambda a^2(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{4a\sin\alpha} = \frac{\lambda a(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}$$

である。x は 2 乗されているので、この式は $x<0$（縮み）のときにも成り立つ。運動エネルギー（kinetic energy）は $2\cdot\frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2 = ma^2\dot{\theta}^2$ である。針金はなめらかで、その抗力は常に運動の向きに垂直なので仕事をせず、エネルギーは保存される。放した瞬間は $\theta=\beta$ かつ $\dot{\theta}=0$ なので

$$ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{\lambda a(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha} = \frac{\lambda a(\sin\beta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}.$$

両辺に $\sin\alpha/a$ を掛けると

$$ma\dot{\theta}^2\sin\alpha + \lambda(\sin\theta-\sin\alpha)^2 = \lambda(\sin\beta-\sin\alpha)^2,$$

となり、示すべき式が得られた。ばねは最初縮んでいるので、$\beta<\alpha$ であることに注意する。

小問 (i)

エネルギーの式を t で微分すると

$$2ma\sin\alpha\,\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2\lambda(\sin\theta-\sin\alpha)\cos\theta\,\dot{\theta} = 0.$$

$2\dot\theta$ で割ると（これはビーズが動いている間は正当であり、結果は連続性によりすべての t に拡張される）、運動方程式（equation of motion）

$$ma\sin\alpha\,\ddot\theta = -\lambda(\sin\theta-\sin\alpha)\cos\theta$$

が得られる。釣り合いの位置（equilibrium）は $\theta=\alpha$ であり、そこでばねは自然長になる。$\beta-\alpha$ が小さければ θ は α の近くにとどまる（エネルギーの式から $|\sin\theta-\sin\alpha|\le|\sin\beta-\sin\alpha|$ が得られる）ので、ε を小さい量として $\theta=\alpha+\varepsilon$ とおく。1 次の近似で $\sin\theta-\sin\alpha\approx\varepsilon\cos\alpha$ であり、また $\cos\theta\approx\cos\alpha$ である。後者はすでに小さい量に掛かっている。よって

$$\ddot\varepsilon \approx -\frac{\lambda\cos^2\alpha}{ma\sin\alpha}\,\varepsilon,$$

であり、これは $\omega^2=\lambda\cos^2\alpha/(ma\sin\alpha)$ の単振動（simple harmonic motion）である。したがって周期は

$$T=\frac{2\pi}{\omega}\approx 2\pi\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda\cos^2\alpha}}.$$

小問 (ii)

$k=\sqrt{ma\sin\alpha/\lambda}$ とおく。エネルギーの式より

$$\dot\theta^2=\frac{1}{k^2}\Big[(\sin\alpha-\sin\beta)^2-(\sin\theta-\sin\alpha)^2\Big].$$

ビーズが止まるのは $\sin\theta-\sin\alpha=\pm(\sin\alpha-\sin\beta)$ のとき、すなわち $\sin\theta=\sin\beta$ または $\sin\theta=2\sin\alpha-\sin\beta$ のときである。$\theta=\beta$ から出発すると θ は増加し（縮んだばねがビーズを押し広げる）、$\sin\beta<\sin\theta<2\sin\alpha-\sin\beta$ である限り $\dot\theta^2>0$ である。

考えてみよう 二つの場合のどちらになるかは、何によって決まるか。

$2\theta=\pi$、すなわち A と B が直径の両端にきて $\sin\theta$ が最大値 1 をとるより前に、θ が二つ目の停止点に達しうるかどうかである。それは $2\sin\alpha-\sin\beta$ が 1 より小さいか大きいかによる。

(a) $\sin\beta>2\sin\alpha-1$ の場合。このとき $2\sin\alpha-\sin\beta<1$ なので、$\sin\gamma=2\sin\alpha-\sin\beta$ となる鋭角 γ が存在し、$\gamma>\alpha$ である。ビーズは $\theta=\gamma$ で静止し（このときばねは、最初に縮んでいたのと同じだけ伸びている）、θ は β と γ の間で振動する。行きと帰りの運動にかかる時間は等しいので

$$T=2\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda}}\int_\beta^\gamma\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\sin\alpha-\sin\beta)^2-(\sin\theta-\sin\alpha)^2}},\qquad \gamma=\arcsin(2\sin\alpha-\sin\beta).$$

(b) $\sin\beta<2\sin\alpha-1$ の場合。このとき $2\sin\alpha-\sin\beta>1\ge\sin\theta$ なので、θ が β と $\frac12\pi$ の間にある限り $\dot\theta$ は決してゼロにならない。すなわち、ビーズは動いたまま直径の

両端を通過する。その後、弦は再び短くなる。エネルギーの式は θ を $\sin\theta$ を通してのみ含み、これは $\frac{1}{2}\pi$ に関して対称であるから、$\frac{1}{2}\pi$ から $\pi-\beta$ までの運動は β から $\frac{1}{2}\pi$ までの運動を鏡に映したものになる。ビーズは $\theta=\pi-\beta$ で止まり、そこでばねは再び元の長さまで縮んでいる。その後ばねはビーズを来た道へ押し戻す。（$\theta=\pi-\beta$ では、運動方程式から $\ddot{\theta}<0$ となる。$\sin\theta-\sin\alpha<0$ かつ $\cos\theta<0$ だからである。）1 回の完全な振動は $\beta\to\pi-\beta\to\beta$ であり、これは β から $\frac{1}{2}\pi$ までの 4 分の 1 の部分の 4 つ分である：

$$T=4\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda}}\int_{\beta}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\sin\alpha-\sin\beta)^2-(\sin\theta-\sin\alpha)^2}}.$$

$\sin\alpha<1$ なので $2\sin\alpha-1<\sin\alpha$ であり、どちらの場合も $\beta<\alpha$ と矛盾しない。場合 (b) が起こりうるのは $2\sin\alpha-1>0$、すなわち $\frac{1}{6}\pi<\alpha<\frac{1}{4}\pi$ のときに限る。

検算

- 場合 (a) では、置換 $\sin\theta=\sin\alpha-(\sin\alpha-\sin\beta)\cos u$ により、積分は $\int_0^{\pi}\mathrm{d}u/\cos\theta$ となる。$\beta\to\alpha$ のときこれは $\pi/\cos\alpha$ に近づき、小問 (i) の周期が再び得られる。
- $m=1.3$、$a=0.7$、$\lambda=2.1$ として、二つのビーズが針金上で独立に動く様子をシミュレーションした。エネルギーの式は丸め誤差の範囲で成り立ち、二等分線は動かなかった。$\alpha=0.6$、$\beta=0.59$ では周期は 3.766 であり、小問 (i) による値は 3.7657 である。$\alpha=0.7$、$\beta=0.4$（場合 (a)）では 4.8847 であり、積分による値は 4.8846 である。$\alpha=0.75$、$\beta=0.1$（場合 (b)）では 7.0553 であり、これに対する値は 7.0553 で、θ は予測どおり $\pi-\beta$ で最大となった。

よくある間違い

- 弾性エネルギーとして $\lambda x^2/(2a)$ を用いてしまう。分母は**自然長**の 2 倍、すなわち $2\cdot 2a\sin\alpha$ である。
- 場合 (b) で、積分を $\theta=\frac{1}{2}\pi$ で打ち切ったり、ビーズがそこで止まると主張したりする。ビーズはゼロでない速さで直径の両端を通過するので、周期は $2\int_{\beta}^{\pi/2}$ ではなく $4\int_{\beta}^{\pi/2}$ である。

STEP のその先へ

小問 (ii) の周期を表す積分は、初等関数の範囲では計算できない。これらは、単振り子の正確な周期を与える**楕円積分**（elliptic integrals）の仲間である。小問 (i) の微小

振動の周期は振幅によらないが、正確な周期は振幅によることに注目しよう。このような線形化した振動子と非線形振動子の対比は、古典力学の最初の講義の中心的なテーマである。内力をもつ系における角運動量の保存は、ここでは二等分線が動かないことを導いたが、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）で丁寧に扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。