解答例

STEP II 見本問題、第 11 問

力学 ・ 放物運動と衝突

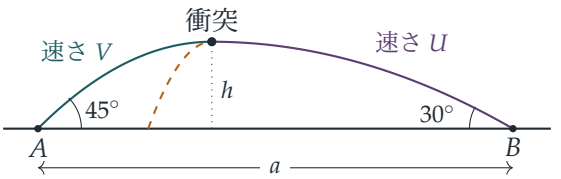
> **STEP II 見本問題、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q11

鍵となる考え方

「衝突するとき、各粒子はそれぞれ最高点にある」という条件は、実は二つの条件を含んでいる。両方の粒子が最高点に達するまでに**同じ時間**がかかり、しかもそのとき**同じ位置**にいなければならない。時間の条件から U と V の関係が得られ、次に水平距離を足し合わせると a になる。衝突後に決定的なのは、両方の粒子が最高点では水平に運動しているという観察である。したがって、合体した粒子は鉛直方向の速度をまったくもたずに運動を始める。

解答

両方の粒子を、AB を含む鉛直面内で重力のみを受けて運動する放物運動（projectile motion）の物体としてモデル化する（空気抵抗は無視する）。水平方向は A から B へ向かう向きを正、鉛直方向は上向きを正とする。



$U^2 = 2V^2$ を示す

A から投げた粒子の初速度の成分は、水平方向が $\frac{V}{\sqrt{2}}$、鉛直方向が $\frac{V}{\sqrt{2}}$ である。B から投げた粒子の成分は、水平方向（A に向かう向き）が $\frac{\sqrt{3}}{2}U$、鉛直方向が $\frac{1}{2}U$ である。

放物運動する物体は、鉛直方向の速度が 0 になるとき最高点にある。鉛直方向の初速さが w のとき、これは時刻 w/g に起こる。両方の粒子は同時に投げ出されるので、衝突の瞬間に両方が最高点にあるならば、これらの時刻は等しくなければならない：

$$\frac{V}{\sqrt{2}\,g} = \frac{U}{2g} \quad \Longrightarrow \quad U = \sqrt{2}\,V \quad \Longrightarrow \quad U^2 = 2V^2,$$

これで示された。この共通の時刻を $T = \dfrac{V}{\sqrt{2}\,g}$ とおく。

考えてみよう 二つの最高点が同じ高さにあることも確かめるべきではないか？

その通りである。時刻が等しいことは必要条件だが、粒子が実際に出会わなければならない。鉛直方向の初速さが w の物体は高さ $w^2/(2g)$ まで上がる。A の粒子についてはこれは $\frac{V^2}{2}/2g = \frac{V^2}{4g}$ であり、B の粒子については $\frac{U^2}{4}/2g = \frac{2V^2}{8g} = \frac{V^2}{4g}$ である。両者は一致するので、$U^2 = 2V^2$ が成り立てば高さは自動的に等しくなる。（実際、これは必然である。両者は同じ加速度のもとで同じ時刻 T に鉛直方向の速度が 0 になるので、高さはどちらも $\frac{1}{2}gT^2$ となる。）衝突の高さを

$$h = \frac{V^2}{4g}$$

とおく。

a を求める

時刻 T において水平方向の位置も一致しなければならない。水平方向の速度は一定なので、時間 T の間に A の粒子は B に向かって $\frac{V}{\sqrt{2}}T$ だけ進み、B の粒子は A に向かって $\frac{\sqrt{3}}{2}UT$ だけ進む。二つは出会うので、これらの距離の和が a になる：

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{V}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}\,V\right)\frac{V}{\sqrt{2}\,g} \\ &= \frac{V^2}{g}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{V^2}{2g}(1+\sqrt{3}), \end{aligned}$$

これが求める結果である。

衝突の後

衝突の瞬間、各粒子は最高点にあるので、どちらも**水平に**運動している。A の粒子の速度は $+\frac{V}{\sqrt{2}}$、B の粒子の速度は $-\frac{\sqrt{3}}{2}U = -\frac{\sqrt{3}\,V}{\sqrt{2}}$ である。

考えてみよう どの運動量が、どの向きに保存されるか？

ごく短い衝突の間に働く大きな力は、粒子どうしが及ぼし合う大きさが等しく向きが反対の力だけである。重力は有限の大きさで、無視できるほど短い時間しか働かない。したがって全運動量は保存される（conservation of momentum）。水平方向について、質量 $2m$ の合体した粒子の速度を v とすると、

$$2m\,v = m\frac{V}{\sqrt{2}} - m\frac{\sqrt{3}\,V}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad v = -\frac{(\sqrt{3}-1)V}{2\sqrt{2}}.$$

負の符号は、合体した粒子が速さ $\dfrac{(\sqrt{3}-1)V}{2\sqrt{2}}$ で A の側へ戻るように運動することを表している。鉛直方向については、両方の粒子の鉛直方向の速度が 0 だったので、合体した粒子も鉛直方向の速度 0 で運動を始める。

合体した粒子は、いまや高さ $h = \frac{V^2}{4g}$ から水平に投げ出された物体である。水平方向の速度は $|v|$ のままである。平面に達したときの鉛直方向の速さ w は $w^2 = 0 + 2gh$ から求まる：

$$w^2 = 2g\cdot\frac{V^2}{4g} = \frac{V^2}{2}, \qquad w = \frac{V}{\sqrt{2}}.$$

したがって、速度が水平となす角 ϕ は次を満たす：

$$\begin{aligned}\tan\phi = \frac{w}{|v|} &= \frac{V}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-1)V} = \frac{2}{\sqrt{3}-1}\\ &= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = 1+\sqrt{3},\end{aligned}$$

ここで 2 行目では分母を有理化した。以上で問題は解けた。

検算

- **単位。** V^2/g の単位は $(\mathrm{m\,s^{-1}})^2/(\mathrm{m\,s^{-2}}) = \mathrm{m}$ であり、距離として正しい。また $\tan\phi$ は速さの比なので無次元である。$\tan\phi$ が V にも g にもまったく依存しないことに注意しよう。これはよい兆候である。
- **幾何的な妥当性。** A の粒子は A から水平距離 $\frac{V^2}{2g}$ の地点で最高点に達し、B の粒子は B から $\sqrt{3}\,\frac{V^2}{2g}$ の地点で最高点に達する。より大きな速さで、より浅い 30° の角で投げた方が長い距離を進み、二つの距離の和は a になる。
- **数値。** $V = 7.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ として二つの軌道を時間について逐次計算したところ、$t = T$ において両者はメートル単位で同じ点 $(2.719, 1.359)$ にあり、鉛直方向の速度はどちらも 0 であった。合体した粒子を平面まで逐次計算すると $\tan\phi \approx 2.73205$ となり、$1+\sqrt{3} = 2.732050\ldots$ と一致した。

よくある間違い

- 鉛直方向の速度が 0 でないとして、鉛直方向の運動量保存を立ててしまう。各軌道の最高点では鉛直方向の速度は 0 であり、まさにこのことが衝突をこれほど単純にしている。
- 水平方向の運動量を引くべきところで足してしまう。粒子は互いに反対向きに運動している。
- $w/|v|$ ではなく $\tan\phi = |v|/w$（鉛直方向となす角）を使ってしまう。

STEP のその先へ

合体する粒子は、完全非弾性衝突（perfectly inelastic collision）の最も簡単な例である。運動量は保存されるが、運動エネルギーは保存されない（ここでは粒子が反対向きに運動していたので、かなりの量が失われる）。大学では、これは重心系（centre-of-mass frame）における衝突の研究になる。重心系では全運動量が 0 であり、失われるエネルギーは重心に対する相対運動の運動エネルギーのすべてである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、運動量と衝突をこのような方法で扱っており、優れた問題が数多く収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。