解答例

STEP II 見本問題、第 10 問

純粋数学 ・ 論理パズル

STEP II 見本問題、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s2-q10

鍵となる考え方

すべては一つの言い換えに基づいている。すなわち、話し手がヒキガエルであるのは、その話し手の発言が真であるとき、かつそのときに限る。そこで各登場人物について「ヒキガエルでありうるか」「カエルでありうるか」を問い、その発言の真理値（truth value）が合わなくなる選び方をすべて除外する。特に、話し手自身についての発言に注意せよ。そのような発言の中には、一方の種類の生き物には決して言えないものがあり、たいていそこが突破口となる。

解答

以下を通じて、「ヒキガエル」は正直者（truth-teller）、「カエル」は嘘つき（liar）を意味する。したがって

$$\text{話し手はヒキガエル} \iff \text{その発言は真.}$$

各場面について、この規則と矛盾しない割り当てをすべて求め、ちょうど一つだけが残ることを確かめる。

小問 (i)

A がヒキガエルであったと仮定する。すると A の発言は真となり、特に A はカエルであることになって矛盾する。よって A はカエルである。

したがって A の発言は偽である。つまり、A と B がともにカエルであるということは成り立たない。A はカエルなので、これが成り立たないためには B がヒキガエルであるしかない。

検算：A がカエル、B がヒキガエルのとき、「私たちは二人ともカエルだ」は偽であり、カエルの発言として当然そうでなければならない。よって **A はカエル、B はヒキガエルである**。

小問 (ii)

これは小問 (i) の鏡像である。C がカエルであったと仮定する。すると「D と私の少なくとも一方はカエルだ」は（C だけで）真となるが、カエルは真のことを言えない。よって C はヒキガエルである。

したがって C の発言は真である。つまり C, D の少なくとも一方はカエルである。C はヒキガエルなので、D がカエルでなければならない。

検算：C がヒキガエル、D がカエルのとき、発言は真であり、ヒキガエルの発言として当然そうでなければならない。よって **C はヒキガエル、D はカエルである**。

小問 (iii)

E の発言「G と H はともにヒキガエルだ」を S とおく。すると G は S が真であると主張し、H は S が偽であると主張している。

> **考えてみよう** まだ誰についても何もわかっていない。いったいどこから手をつければよいだろうか。

E ではなく、G と H をまとめて見よ。二人の発言は互いにちょうど正反対なので、ちょうど一方が真である。よって S がどうであれ、G, H のちょうど一方がヒキガエルで、もう一方がカエルである。

これで S が決まる。G, H の一方はカエルなので、二人がともにヒキガエルということはなく、S は偽である。したがって次のようになる。

- E は偽のことを言ったので、E はカエルである。
- G は S が真であると主張したが、それは偽なので、G はカエルである。
- H は S が偽であると主張し、それは真なので、H はヒキガエルである。

検算：G はカエルなので、「G と H はともにヒキガエルだ」は確かに偽であり、すべての判定と矛盾しない。よって **E と G はカエル、H はヒキガエルである**。

小問 (iv)

ここで「私たち」とは I, J, K の三人を指す。

I はカエルである。 I がヒキガエルであったとすると、「私たちは全員カエルだ」は真

となり、I はカエルであることになって矛盾する。よって I はカエルであり、I の発言は偽である。つまり三人全員がカエルではないので、

$$\text{つまり} J, K \text{ の少なくとも一方はヒキガエル.} \qquad (*)$$

J はヒキガエルである。逆に J がカエルであったと仮定する。すると $(*)$ より K はヒキガエルであり、I はカエル、J はカエル、K はヒキガエルとなる。すなわちヒキガエルはちょうど一匹である。これは J の発言を真にするが、カエルはそれを言えない。よって J はヒキガエルである。

K はカエルである。J はヒキガエルなので、J の発言は真である。つまり三人のうちヒキガエルはちょうど一匹である。そのヒキガエルは J なので、K はカエルである。

考えてみよう K がカエルとわかった今でも、$(*)$ は成り立っているだろうか。

成り立っている。$(*)$ が要求するのは J, K の一方がヒキガエルであることだけであり、J がそうである。よって全体の検算は次のとおりである。I の「私たちは全員カエルだ」は偽であり（J がヒキガエル）、J の「私たちのうちちょうど一匹がヒキガエルだ」は真である（J のみ）。どちらの発言も正しい真理値をもつので、**I と K はカエル、J はヒキガエルである。**

検算

各場面の割り当ては 2^2 通りまたは 2^3 通りしかないので、完全な検算は短い真理値表（truth table）で済む。各割り当てについて、すべての話し手の発言が、その話し手がヒキガエルであるとき、かつそのときに限り真であるかを調べればよい。四つの場面すべてについてこの全数探索を行ったところ、いずれの場面でもちょうど一つの割り当て、すなわち上で求めたものだけが残った。（一意性は重要である。問題は**判定せよ**と求めているので、うまくいくものを一つ見つけるだけでなく、ほかのものを除外する必要がある。）

よくある間違い

- 矛盾のない割り当てを一つ見つけたところで終えてしまう。ほかのどの割り当てもうまくいかないことも示さなければならず、それを担っているのが「……であったと仮定する」による矛盾の議論である。
- 小問 (iii) で、G の「それは真だ」を、E の主張についてではなく G 自身についての発言として扱ってしまう。

- 小問 (iv) で、何も言わない K も「私たち全員」や「私たちのうちちょうど一匹」に含まれることを忘れてしまう。

STEP のその先へ

このようなパズルは命題論理（propositional logic）の練習問題である。各生き物はブール変数（Boolean variable）t、各発言は論理式 P であり、それぞれの話し手は制約 $t \iff P$ を課す。このような制約の系が解をもつかどうかを判定する問題は**充足可能性問題**（satisfiability problem）と呼ばれ、理論計算機科学の中心的な問題である。また、小問 (i) の自己否定的な発言は、嘘つきのパラドックス（liar paradox）の穏やかな親戚にあたる。レイモンド・スマリヤン（Raymond Smullyan）の *What Is the Name of This Book?*（邦題『この本の名は ?』）は、騎士と悪漢（knights and knaves）のパズルを集めた楽しい本で、最後にはゲーデル（Gödel）の不完全性定理へと至る。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。