解答例

STEP II 見本問題、第 1 問

純粋数学 ・ 部分分数分解

> **STEP II 見本問題、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q1

鍵となる考え方

いつもの部分分数分解（partial fractions）の手順に取りかかる前に、分子を見てみよう。分子は分母の導関数（derivative）にちょうど一致している。分母は一次式の積に因数分解できるので、f は対数微分（logarithmic derivative）であり、積の対数微分は各因数の対数微分の和になる。後半では、方程式は和が 1 になる 3 つの単位分数（unit fraction）の式となり、大きさを評価するだけで x は非常に小さい値に限られる。

解答

部分分数分解

分母は次のように因数分解できる。

$$D(x) = x^3 + (a+b)x^2 + abx = x(x^2 + (a+b)x + ab) = x(x+a)(x+b),$$

これを微分すると

$$D'(x) = 3x^2 + 2(a+b)x + ab,$$

となり、これはまさに分子である。したがって $\mathrm{f}(x) = D'(x)/D(x)$ である。

一般の場合、 $a \neq b$。3 つの因数 $x, x+a, x+b$ は互いに異なる（$a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$ であるから）。よって、3 つの単純な部分分数が現れると予想される。積の微分法（product rule）により

$$D'(x) = (x+a)(x+b) + x(x+b) + x(x+a),$$

であり、これを $D(x) = x(x+a)(x+b)$ で項ごとに割ると

$$\boxed{\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}} \qquad (a \neq b).$$

を得る。（同じことであるが、$\mathrm{f}(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x(x+a)(x+b)|$ であり、積の対数は和に分かれる。）もちろん、隠蔽法（cover-up rule）を使っても同じ結果が得られる。$x = 0$ における留数（residue）は $ab/(ab) = 1$ であり、$x = -a$ では $(3a^2 - 2a^2 - 2ab + ab)/((-a)(b-a)) = a(a-b)/(a(a-b)) = 1$ である。$x = -b$ でも同様である。

? **考えてみよう** $a = b$ のとき、この形では何がまずいだろうか。

特別な場合、$a = b$。 このとき分母は $x(x+a)^2$ となり、重複因数をもつ。したがって標準的な形は $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+a} + \frac{C}{(x+a)^2}$ となるはずである。しかし、分子も因数 $x+a$ をもつ。

$$3x^2 + 4ax + a^2 = (3x+a)(x+a),$$

よってこれが約分され、

$$\mathrm{f}(x) = \frac{3x+a}{x(x+a)} = \boxed{\frac{1}{x} + \frac{2}{x+a}} \qquad (a = b),$$

が残る。最後の等号は隠蔽法による（$x = 0$ で $a/a = 1$、$x = -a$ で $-2a/(-a) = 2$）。$(x+a)^{-2}$ の項はまったく現れず、$C = 0$ である。これは一般の場合の式で b を a に置き換えたものと一致するが、重複因数が 2 乗の項を生むのではなく消えてしまったことには注目する価値がある。

a と b は 0 でないので、因数 x が $x+a$ や $x+b$ と一致することはない。よって場合はこれですべてである。

$\mathrm{f}(x) = 1$ となるとき

ここで x, a, b を正の整数とする。上のどちらの場合も（$a = b$ の式は一般の式で $b = a$ としたものにすぎない）

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b},$$

であり、3 つの項はすべて正である。$a, b \geq 1$ であるから、後ろの 2 つの項はそれぞれ $\frac{1}{x}$ より真に小さい。

? **考えてみよう** それぞれ $\frac{1}{x}$ 以下である 3 つの分数の和が 1 になるとき、x はどこまで大きくなれるだろうか。

▶ $x = 1$ ならば $\mathrm{f}(x) = 1 + (\text{正の数}) > 1$ である。

- $x \geq 4$ ならば $\mathrm{f}(x) < \frac{3}{x} \leq \frac{3}{4} < 1$ である。
- $x = 3$ ならば $x + a \geq 4$ かつ $x + b \geq 4$ であるから、$\mathrm{f}(x) \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{6} < 1$ である。

したがって $\mathrm{f}(x) = 1$ ならば $x = 2$ でなければならず、このとき

$$\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} = \frac{1}{2}.$$

が必要である。両辺に $2(2+a)(2+b)$ を掛けると $2(2+b) + 2(2+a) = (2+a)(2+b)$、すなわち $8 + 2a + 2b = 4 + 2a + 2b + ab$ となるので

$$ab = 4.$$

である。a, b が正の整数であることから、可能性は $(a,b) = (1,4), (2,2), (4,1)$ のみである。よって $\mathrm{f}(x) = 1$ となるのはちょうど

$$(x,a,b) = (2,1,4), \quad (2,2,2), \quad (2,4,1),$$

のときであり、求められていたとおり有限個（3 つ）である。$(2,2,2)$ は特別な場合 $a = b$ にあたることに注意しよう：$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$。

検算

3 つの解は、よく知られた単位分数の等式 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ と $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ である。数値的には、部分分数分解した形と元の f を、無作為に選んだ 2000 個の有理数点において厳密な有理数演算で比較した（$a \neq b$ と $a = b$ の両方について）。また、$1 \leq x, a, b < 200$ のすべてを総当たりで調べたところ、上の 3 つの組がちょうど見つかり、それ以外はなかった。

よくある間違い

- $a = b$ の場合に $\frac{C}{(x+a)^2}$ の項を立ててがむしゃらに計算し、約分に気づかないこと。$C = 0$ となるはずであり、分子の因数 $(x+a)$ に気づけば手間が省ける。
- $x = 1$ と $x = 3$ を除外し忘れること。粗い評価 $\mathrm{f} < 3/x$ で片づくのは $x \geq 4$ だけである。
- 「$ab = 4$」で止まって解を列挙しないこと、あるいは $(1,4)$ だけを挙げて $(4,1)$ と $(2,2)$ を忘れること。

STEP のその先へ

多項式 D の根を r_i（重根は重複度を込めて数える）とするとき、恒等式 $D'/D = \sum 1/(x - r_i)$ は非常に役に立つ道具である。これは根のべき乗和に関するニュートンの恒等式（Newton's identities）の基礎となり、複素解析では偏角の原理（argument principle）の基礎となる。偏角の原理とは、曲線に沿って f'/f を積分することで、その曲線の内部にある関数の零点の個数を数えるものである。$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ のような方程式を正の整数で解く問題はエジプト分数（Egyptian fraction）の問題と呼ばれ、ディオファントス方程式（Diophantine equation）の古典的な一分野である。そこでは、ここで用いたような評価による議論がすべてを決める。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析）は偏角の原理を幾何学的に美しく解説しており、Davenport の *The Higher Arithmetic*（高等算術）はディオファントス方程式を学び始めるのによい一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。