解答例

STEP I 見本問題、第 9 問

純粋数学 ・ 絶対値を含む不等式

STEP I 見本問題、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s1-q9

鍵となる考え方

どちらの小問も、絶対値記号（modulus）の中の式がどこで符号を変えるか、あるいはどこである値を横切るかを正確に求めることで、絶対値記号を外すという問題である。(i) では $u = x+1$ とおくと式は $u - 2/u$ となり、これは $u = 0$ の両側それぞれで増加関数である。したがって、不等式は各枝の上で u を 2 次方程式の 2 つの根の間に挟み込むだけのものになる。(ii) では $\cos x - \sin x$ を 1 つの余弦で表すことで符号の変わる点がわかり、そこで積分を分割する。

解答

小問 (i)

式が定義されるためには $x \neq -1$ が必要である。$u = x+1$ とおくと $u \neq 0$ であり、

$$x + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2+2x-1}{x+1} = \frac{(x+1)^2-2}{x+1} = u - \frac{2}{u}.$$

これを $f(u)$ とおく。不等式は $-2 < f(u) < 2$ となる。

考えてみよう なぜ単純に両辺に $x+1$ を掛けないのか？

$x+1$ は負になりうるからであり、負の数を掛けると不等号の向きが逆になる。これを不用意に行うのは、答えの半分を失う典型的な原因である。そこで代わりに f の形を利用する。導関数（derivative）は $f'(u) = 1 + 2/u^2 > 0$ であるから、f は $u < 0$ において、また別に $u > 0$ において、狭義単調増加（strictly increasing）である。各枝の上で f は $-\infty$ から $+\infty$ までの値をとる。実際、$u \to 0^-$ のとき $-2/u \to +\infty$、$u \to 0^+$

のとき $-2/u \to -\infty$ であり、$|u| \to \infty$ のとき $f(u) \sim u$ である。よって各枝の上で f は値 -2 と 2 をそれぞれちょうど 1 回ずつとり、$-2 < f < 2$ が成り立つのはちょうどその 2 点の間である。

$u \neq 0$ のとき、u を掛けると次の 2 つの同値な方程式が得られる。

$$f(u) = 2 \iff u^2 - 2u - 2 = 0 \iff u = 1 \pm \sqrt{3},$$
$$f(u) = -2 \iff u^2 + 2u - 2 = 0 \iff u = -1 \pm \sqrt{3}.$$

枝 $u > 0$。 正の根は $u = -1 + \sqrt{3}$（$f = -2$ となる点）と $u = 1 + \sqrt{3}$（$f = 2$ となる点）である。f は増加関数であるから、$-2 < f(u) < 2$ となるのはちょうど $-1 + \sqrt{3} < u < 1 + \sqrt{3}$ のとき、すなわち $-2 + \sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ のときである。

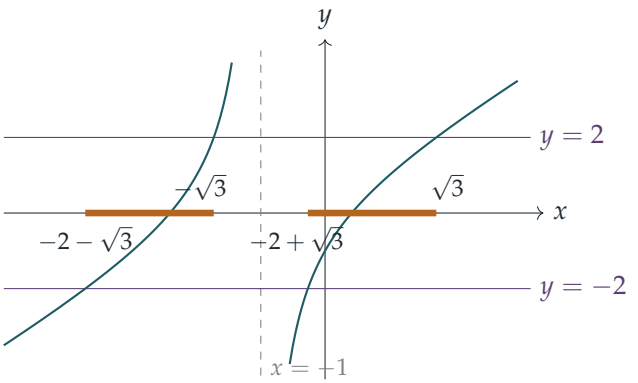
枝 $u < 0$。 負の根は $u = -1 - \sqrt{3}$（$f = -2$ となる点）と $u = 1 - \sqrt{3}$（$f = 2$ となる点）である。再び単調性（monotonicity）により、$-2 < f(u) < 2$ となるのはちょうど $-1 - \sqrt{3} < u < 1 - \sqrt{3}$ のとき、すなわち $-2 - \sqrt{3} < x < -\sqrt{3}$ のときである。

どちらの区間も $x = -1$ を含まない（$-\sqrt{3} < -1 < -2 + \sqrt{3}$ に注意）。よって解の集合は

$$\boxed{(-2 - \sqrt{3},\ -\sqrt{3}) \cup (-2 + \sqrt{3},\ \sqrt{3})}$$

であり、題意のとおり端点はすべて $a + b\sqrt{3}$ の形をしている。端点では絶対値がちょうど 2 に等しくなるので、端点は含まれない。

$y = x + (x-1)/(x+1)$ のグラフを直線 $y = \pm 2$ とともに描くと、曲線が 2 直線の間にある 2 つの区間（琥珀色で示す）がわかる。



小問 (ii)

2 つの項を 1 つの余弦にまとめる。

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$0 \le x \le \pi$ のとき $\pi/4 \le x + \pi/4 \le 5\pi/4$ であり、余弦は $[\pi/4, \pi/2)$ で正、$(\pi/2, 5\pi/4]$ で負である。よって $0 \le x \le \pi/4$ では $\cos x - \sin x \ge 0$、$\pi/4 \le x \le \pi$ では ≤ 0 である。積分を $\pi/4$ で分割し、$\cos x - \sin x$ の原始関数（antiderivative）の 1 つが $\sin x + \cos x$ であることを用いると、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\cos x - \sin x| \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) \, \mathrm{d}x - \int_{\pi/4}^{\pi} (\cos x - \sin x) \, \mathrm{d}x \\ &= \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} - \Big[\sin x + \cos x\Big]_{\pi/4}^{\pi} \\ &= (\sqrt{2} - 1) - (-1 - \sqrt{2}) \\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

検算

- (i) の具体的な値による確認：$x = 0$ のとき式の値は -1 で絶対値の範囲内にあり、実際 $0 \in (-2 + \sqrt{3}, \sqrt{3})$ である。$x = -2$ のとき値は $-2 + 3 = 1$ で、$-2 \in (-2 - \sqrt{3}, -\sqrt{3})$ である。$x = -1.5$ のとき値は $-1.5 + 5 = 3.5$ で範囲外であり、確かに $-1.5 \in (-\sqrt{3}, -1)$ はどちらの区間にも属さない。
- 細かい格子点上と、$[-50, 50]$ 内の 2×10^5 個の無作為な点で不等式を調べたところ、いたるところで 2 つの区間と一致した。また 4 つの端点すべてで絶対値は 2 に等しい。
- (ii) では、シンプソンの公式（Simpson's rule）により 2.828427… が得られ、$2\sqrt{2} \approx 2.828427$ と一致する。2 つの部分はそれぞれ $\sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$ と $\sqrt{2} + 1 \approx 2.4142$ である。妥当性の確認として、被積分関数（integrand）は高々 $\sqrt{2}$ であるから、積分は高々 $\sqrt{2}\,\pi \approx 4.44$ である。

よくある間違い

- $x + \frac{x-1}{x+1} < 2$ の両辺に $x + 1$ の符号を考えずにそれを掛けてしまい、$x = -1$ より左の区間を失う（あるいは誤って含めてしまう）。
- $f < 2$ だけ、あるいは $f > -2$ だけを解いてしまう。絶対値の不等式では両方が同時に成り立つ必要がある。
- (ii) で、$\cos x - \sin x$ を $[0, \pi]$ 全体でそのまま積分してしまい、-2 を得る（絶対値の積分が負になったら、誤りを疑うべき危険信号である）。

STEP のその先へ

(i) の工夫は、代数的な不等式を単調関数についての主張に置き換えることである。すなわち、f がある区間で狭義単調増加ならば、$a < f(u) < b$ が成り立つのはちょうど $f = a$ となる点と $f = b$ となる点の間である。これを厳密に示すには中間値の定理（intermediate value theorem）を用いる。これは大学の解析学（analysis）の講義で最初に出会う大きな定理の 1 つである。また $|x - a| < \varepsilon$ のような絶対値を含む不等式は、その講義における日常の言葉である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、その両方に触れられる親しみやすい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。