解答例

# STEP I 見本問題、第 8 問

純粋数学 ・ 積分方程式

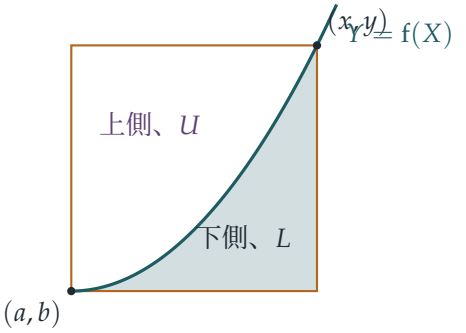
> **STEP I 見本問題、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q8

## 鍵となる考え方

面積の条件は $(x,y)$ のあらゆる位置で成り立つので、これは実は $x$ の 2 つの関数のあいだの等式である。一方の辺は f の積分であり、もう一方の辺には $\mathrm{f}(x)$ そのものが含まれる。$x$ で微分すると積分が消え、一階（first-order）の微分方程式（differential equation）が残る。これは変数分離（separation of variables）で解ける（あるいは、よりすっきりと、ある商の導関数が 0 であるという形になる）。

## 解答

$\mathrm{f}'(x) \geq 0$ であるから、曲線は長方形の頂点 $(a,b)$ から向かい合う頂点 $(x,y)$ へと上っていく。よって長方形の幅は $x-a$、高さは $y-b=\mathrm{f}(x)-b \geq 0$ である。下側の部分は曲線と下の辺 $Y=b$ にはさまれた領域（下図の網かけ部分）であり、上側の部分はその残りである。



積分変数として $t$ を用いると（$x$ はここでは積分の上端であるため）、

$$L = \int_a^x (\mathrm{f}(t) - b)\,\mathrm{d}t, \qquad L + U = (x-a)(\mathrm{f}(x) - b).$$

条件 $L = \frac{1}{2}U$ は $U = 2L$ を意味するので、長方形全体の面積は $3L$ である：

$$3\int_a^x (\mathrm{f}(t) - b)\,\mathrm{d}t = (x-a)(\mathrm{f}(x) - b) \qquad \text{任意の} x \geq a. \tag{$*$}$$

**考えてみよう** 積分を含む等式から、f について解ける形にするにはどうすればよいか？

$(*)$ はすべての $x \geq a$ で成り立つので、両辺は $x$ の同じ関数であり、したがってそれらの導関数も一致する。関数 f は微分可能であり（f′ についての条件が与えられている）、ゆえに連続である。よって微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）により、左辺の導関数は $3(\mathrm{f}(x) - b)$ である。右辺を積の微分法（product rule）で微分すると、

$$3(\mathrm{f}(x) - b) = (\mathrm{f}(x) - b) + (x-a)\,\mathrm{f}'(x),$$

すなわち

$$(x-a)\,\mathrm{f}'(x) = 2(\mathrm{f}(x) - b).$$

これを整理するため、$g(x) = \mathrm{f}(x) - b$、$u = x - a$ とおく。すると $g' = \mathrm{f}'$ であり、方程式は $u\,g' = 2g$ となる。変数分離して $g'/g = 2/u$ とすることもできるが、それには $g$ で割る必要があり、$g$ は 0 になるかもしれない。$x > a$（したがって $u > 0$）において次のことに気づくほうがすっきりしている：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{g}{u^2}\right) = \frac{u^2 g' - 2u\,g}{u^4} = \frac{u\,g' - 2g}{u^3} = 0.$$

よって $g/u^2$ は $x > a$ において定数であり、それを $k$ とおくと

$$\mathrm{f}(x) - b = k(x-a)^2 \qquad (x > a),$$

となる。$(a, b)$ は曲線上にあるので、これは $x = a$ でも成り立つ。$x \geq a$ において $\mathrm{f}(x) \geq b$ である（関数は $\mathrm{f}(a) = b$ から非減少（non-decreasing）である）から $k \geq 0$ であり、さらに曲線が水平な直線 $y = b$ である場合を除けば $k > 0$ である。その場合はどの長方形も面積 0 につぶれてしまい、条件は意味をもたない。

したがって曲線は $x \geq a$ における $y - b = k(x-a)^2$、すなわち鉛直な軸 $x = a$ と頂点 $(a, b)$ をもつ放物線（parabola）の半分である。$x \geq a$ なので右側の枝だけが得られ、よってこれは題意のとおり放物線の弧である。

逆に、この曲線は確かに条件を満たす：$L = \int_a^x k(t-a)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}k(x-a)^3$ であり、長方形の面積は $(x-a)\cdot k(x-a)^2 = k(x-a)^3$ であるから、$U = \frac{2}{3}k(x-a)^3 = 2L$ となる。

## 検算

$a = b = 0$、$k = 1$、$x = 3$ とすると、長方形は $3 \times 9$ で面積は 27、また $\int_0^3 t^2 \, \mathrm{d}t = 9$ であるから、2 つの部分は 9 と 18 で、比は 1 : 2 である。より一般に、$y - b = k(x-a)^p$ に対して下側と上側の面積比は $1/p$ である（$p = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3$ についてシンプソンの公式（Simpson's rule）で数値的に確かめた）。よって比 $\frac{1}{2}$ からは $p = 2$ が選び出される。直線（$p = 1$）は当然ながら長方形を等分する。

## よくある間違い

- $x$ を積分の上端と積分変数の両方に用いてしまい、微分の段階が混乱する。
- 2 つの部分を取り違えて $U = \frac{1}{2}L$ としてしまう。すると $(x-a)\mathrm{f}' = \frac{1}{2}(\mathrm{f} - b)$ となり、曲線 $y - b = k\sqrt{x-a}$、すなわち**水平な**軸をもつ、向きの違う放物線が得られてしまう。
- 断りなく $\mathrm{f}(x) - b$ で割ってしまう。上で用いた商の議論はこれを回避している。

## STEP のその先へ

等式 $(*)$ は**積分方程式**（integral equation）である。すなわち未知関数が積分の中に現れている。微分によって微分方程式に直し、もとの等式が初期値（initial value）も定めていることを忘れない、というのが定石の第一手である。そして答えの一意性（uniqueness）は、区間上で導関数が 0 である関数は定数である、という事実（平均値の定理（mean value theorem）の帰結）に基づいている。Abbott の *Understanding Analysis* は微分積分学の基本定理と平均値の定理をともに丁寧に証明している。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations* は $u\,g' = 2g$ のような方程式を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。