解答例

STEP I 見本問題、第 7 問

純粋数学 ・ 複素指数級数

> **STEP I 見本問題、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q7

鍵となる考え方

$1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ を見たら、いつでも「半角（half-angle）」の因数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$ をくくり出すとよい。残るのは $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$ であり、これは実数である。級数については、二項係数（binomial coefficient）$\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}$ が二項定理（binomial theorem）を示唆している。そこで各正弦を指数関数の虚部（imaginary part）として書くと、和は $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$ の累乗の虚部となる。これは前半ですでに極形式（polar form）に直してある。

解答

絶対値と偏角

因数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ をくくり出すと、

$$\begin{aligned}1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}[(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)+(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)]\\ &= 2\cos\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}.\end{aligned}$$

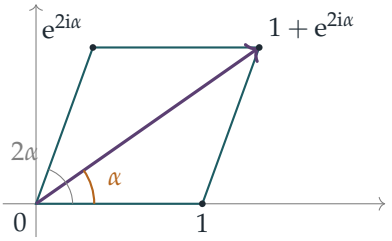
> ? **考えてみよう** これでそのまま「絶対値（modulus）は $2\cos\alpha$、偏角（argument）は α」と読み取ってよいだろうか。α に対する制限は何のためにあるのか。

$r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ という形から絶対値 r、偏角 θ が得られるのは、$r>0$ のときに限る。ここでは $-\frac{1}{2}\pi<\alpha<\frac{1}{2}\pi$ なので $\cos\alpha>0$ であり、さらにこの範囲は主値の区間（principal interval）$(-\pi,\pi]$ の内部にある。したがって

$$|1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}|=2\cos\alpha,\qquad \arg(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})=\alpha.$$

（もし $\cos\alpha$ が負であれば、絶対値は $-2\cos\alpha$ となり、偏角は π だけずれる。）

美しい幾何的な描像もある。点 0、1、$1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$ は、点 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$ とともに、辺の長さが 1 のひし形（rhombus）をなす。0 から出る対角線は角 2α を二等分し、その長さは $2\cos\alpha$ である。



級数

実数 θ に対して $\sin\theta = \operatorname{Im}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ であり、二項係数は実数であるから、

$$\begin{aligned} S &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\sin(2r+1)\alpha = \operatorname{Im}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\alpha} \\ &= \operatorname{Im}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})^r\Big] = \operatorname{Im}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})^n\Big], \end{aligned}$$

ここで $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})^r$ を用い、続いて二項定理を用いた。次に、前半の結果とド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}$ を用いると、

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,2^n\cos^n\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha} = 2^n\cos^n\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha}.$$

$2^n\cos^n\alpha$ は実数であるから、虚部をとると

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\sin(2r+1)\alpha = 2^n\cos^n\alpha\,\sin(n+1)\alpha.}$$

因数分解 $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} = 2\cos\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ は**すべての**実数 α に対して成り立つ。$\cos\alpha > 0$ が必要だったのは絶対値と偏角を言い表すためだけであり、したがって和の公式は与えられた範囲に限らず、すべての実数 α に対して成り立つ。

検算

- $n=0$：両辺とも $\sin\alpha$ である。$n=1$：左辺は和積公式（sum-to-product formula）により $\sin\alpha+\sin 3\alpha = 2\sin 2\alpha\cos\alpha$ となり、$2\cos\alpha\sin 2\alpha$ と一致する。
- $n=3$、$\alpha=\frac{\pi}{6}$：左辺は $\frac{1}{2}+3+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$、右辺は $8\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{2}$ である。

- $\alpha = \frac{1}{2}\pi$：各項は $\sin(2r+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^r$ となるので、和は $n \geq 1$ に対して $(1-1)^n = 0$ であり、$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ と一致する。
- $0 \leq n \leq 24$ について、無作為に選んだ α の値で公式が成り立つことを数値的に確かめた。

よくある間違い

- α の範囲によって正になることに触れずに、絶対値を $2\cos\alpha$ と答えること。絶対値は負にはなりえない。
- 虚部を早くとりすぎること。$\mathrm{Im}(zw) \neq \mathrm{Im}\, z \cdot \mathrm{Im}\, w$ であるから、最後の最後まで複素数のまま扱うこと。
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\alpha}$ を $\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^r$ と書いてしまい、余分な因数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ を落とすこと。そうすると $\sin(n+1)\alpha$ が $\sin n\alpha$ になってしまう。

STEP のその先へ

$\sum \binom{n}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\theta}$ を閉じた形で求めるという同じ考え方は、フーリエ解析（Fourier analysis）にも現れる。そこでは $\cos^n$ 型の式を倍角の和に展開したり、逆に倍角の和をまとめたりし、二項の重み $\binom{n}{r}/2^n$ は二項分布（binomial distribution）となる。半角をくくり出す方法は、$1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ の絶対値を求める標準的な方法でもあり、これは等比級数（geometric series）や 1 の累乗根（roots of unity）で出会うことになる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、ひし形の図も含め、こうした式変形の幾何的な見方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。