解答例

STEP I 見本問題、第 6 問

純粋数学 ・ 弓形の面積

> **STEP I 見本問題、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q6

鍵となる考え方

この硬貨は、正七角形（regular heptagon）の各辺の外側に円弧状の「ふくらみ」がついた形である。したがってその面積は、正七角形の面積に 7 つの弓形（circular segment）の面積を加えたものであり、弓形の面積は扇形（sector）から三角形を除いたものである。こうして問題はすべて 2 つの角に帰着する。1 つは各円弧がその中心に対して張る角（円周角の定理（inscribed angle theorem）からただちに得られる）、もう 1 つは正七角形の長い対角線（diagonal）と外接円（circumcircle）の半径とのなす角である。

解答

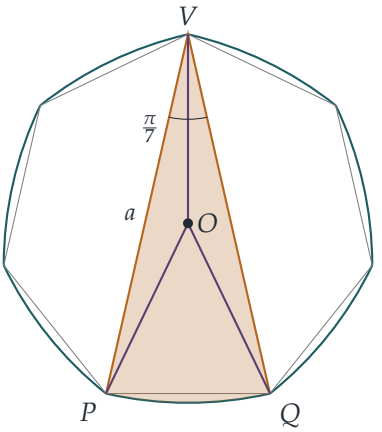
図形の形

各頂点は、それに向かい合う円弧の両端から距離 a の位置にある（両端はともに、その頂点を中心とする半径 a の円上にある）。したがって、各頂点とそこから 3 つ先の頂点を結ぶ 7 本の「長い」対角線は、すべて長さ a をもつ。等しい半径の等しい円弧はその中心に対して等しい角を張るので、7 本の辺（円弧の弦）もまたすべて等しい。

長い対角線を順にたどると、すべての辺の長さが a の七芒星ができる。その各先端での角は、その頂点から出る 2 本の対角線のなす角であり、これら 2 本の対角線と向かい合う辺とで、辺の長さが a、a および共通の辺の長さである三角形ができる。このような 7 つの三角形はすべて合同（congruent）なので、この星形は等辺であるだけでなく等角でもあり、したがって正則である。ゆえに 7 つの頂点は正七角形の頂点であり、その中心を O、外接円の半径を R とする。

1 つの頂点を V とし、V を中心とする円弧の両端を P、Q とする。P と Q は正七角形

の隣り合う頂点である。



各円弧の角

辺 PQ は中心 O に対して角 $2\pi/7$ を張る。V は外接円上の、PQ に対する優弧上にあるので、円周角の定理より

$$\angle PVQ = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{7} = \frac{\pi}{7}.$$

したがって各円弧は、半径 a の円の一部で、その中心に対して角 $\pi/7$ を張る。よって扇形 VPQ（網かけ部分）の面積は

$$\tfrac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\pi}{7} = \frac{\pi a^2}{14}.$$

である。

面積を足し合わせる

硬貨の面は、正七角形と、各辺に 1 つずつある 7 つの弓形からなる。正七角形は OPQ のような 7 つの三角形に分けられ、辺 PQ 上の弓形は扇形 VPQ から三角形 VPQ を除いたものである。よって

$$\begin{aligned} \text{面積} &= 7\,[OPQ] + 7\big(\text{扇形}VPQ - [VPQ]\big) \\ &= \frac{\pi a^2}{2} - 7\big([VPQ] - [OPQ]\big), \end{aligned}$$

である。ここで $[\cdot]$ は面積を表す。

考えてみよう 2 つの三角形の面積をそれぞれ計算することなく、$[VPQ] - [OPQ]$ を求めるにはどうすればよいか。

中心 O は三角形 VPQ の内部、その対称軸上にある。したがって三角形 VPQ から三角形 OPQ を除くと、合同な 2 つの三角形 OVP と OVQ が残る：

$$[VPQ] - [OPQ] = [OVP] + [OVQ] = 2 \cdot \tfrac{1}{2} R\, a \sin \angle OVP.$$

対称性より VO は $\angle PVQ$ を二等分するので、$\angle OVP = \pi/14$ である。三角形 OVP は $OV = OP = R$ の二等辺三角形なので、2 つの底角はともに $\pi/14$ であり、O から VP に垂線を下ろすと

$$a = VP = 2R \cos \frac{\pi}{14}, \qquad \text{よって} \qquad R = \frac{a}{2\cos(\pi/14)}.$$

を得る。したがって

$$[VPQ] - [OPQ] = R\, a \sin \frac{\pi}{14} = \frac{a^2 \sin(\pi/14)}{2\cos(\pi/14)} = \frac{a^2}{2} \tan \frac{\pi}{14},$$

であり、

$$\text{面積} = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{7a^2}{2} \tan \frac{\pi}{14} = \frac{a^2}{2} \left(\pi - 7 \tan \frac{\pi}{14} \right),$$

となって、示すべき式が得られた。

検算

- 数値的には $\frac{1}{2}(\pi - 7\tan\frac{\pi}{14}) \approx 0.7719$ なので、面積はおよそ $0.772a^2$ である。7 つの円弧上に点を密にとって靴ひも公式（shoelace formula）を用いた計算とも小数第 6 位まで一致し、モンテカルロ法（Monte Carlo method）による推定とも同様に一致する（点が硬貨の内部にあるのは、7 つの頂点すべてから距離 a 以内にあるとき、かつそのときに限る）。
- この硬貨はどの方向にも幅 a をもち、この点で直径 a の円板と同じである。円板の面積は $\pi a^2/4 \approx 0.785a^2$ である。幅が一定値 a であるすべての図形のうちで面積が最大なのは円板なので、それより少し小さくなるはずであり、実際 $0.772a^2 < 0.785a^2$ となっている。
- ルーローの n 角形（Reuleaux n-gon、n は奇数）に同じ議論を適用すると $\frac{a^2}{2}(\pi - n\tan\frac{\pi}{2n})$ を得る。$n \to \infty$ のとき $n\tan\frac{\pi}{2n} \to \frac{\pi}{2}$ となり、面積は円板の面積 $\pi a^2/4$ に近づく。$n = 3$ のときは、よく知られたルーローの三角形の面積 $\frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})a^2$ が得られる。

よくある間違い

- 円弧の角を、$\pi/7$（円弧の実際の中心である向かい側の頂点での角）ではなく、$2\pi/7$（中心 O での角）としてしまう。

▶ a を外接円の半径 R と混同する。a は長い対角線であり、$a = 2R\cos(\pi/14)$ である。

STEP のその先へ

50 ペンス硬貨（50p coin）は**定幅図形**（curve of constant width）である。すなわち、平行な 2 本の接線（tangent line）の組はどれも同じ距離 a だけ離れている。硬貨投入口がどの向きに入れても同じように硬貨を測れるのはこのためである。バルビエの定理（Barbier's theorem）によれば、このような曲線の周の長さはすべて πa であり（ここでは $7 \cdot a \cdot \pi/7$）、ブラシュケ–ルベーグの定理（Blaschke–Lebesgue theorem）によれば、面積が最小となるのはルーローの三角形である。この種の幾何学についてさらに知りたければ、クーラント（Courant）とロビンズ（Robbins）の *What Is Mathematics?*（『数学とは何か』）に、定幅図形についてのすばらしい節がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。