解答例

STEP I 見本問題、第 5 問

純粋数学 ・ 桁数と階乗の数え上げ

STEP I 見本問題、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s1-q5

鍵となる考え方

どちらの小問も、計算するというより注意深く数え上げる問題である。(i) では、まず 1 桁、2 桁、3 桁の数というまとまりごとに桁数を数えて、1000 番目の数字がちょうどどこに来るかを突き止め、そのうえで 7 の個数を一の位、十の位、百の位と位ごとに数える。(ii) では、末尾の 0（trailing zeros）の 1 つ 1 つが因数 $10 = 2 \times 5$ に対応し、5 は 2 よりも少ないので、365! に含まれる因数 5 の個数を数えればよい。

解答

小問 (i)

どこで止まるか。 1 から 9 までの数で 9 個の数字を使う。10 から 99 までの 90 個の 2 桁の数で 180 個の数字を使い、ここまでで 189 個となる。残りは

$$1000 - 189 = 811 = 3 \times 270 + 1$$

個の数字である。最初の 270 個の 3 桁の数は $100, 101, \ldots, 369$ であり、これらで 810 個の数字を使う。最後の数字は 370 の先頭の数字、すなわち 3 である。したがって、$1, 2, \ldots, 369$ をすべて書き終え、そのあとに 3 を 1 つだけ書いたことになる。

? **考えてみよう** 数 370 には 7 が含まれている。これは数えるべきだろうか？

数えない。先頭の数字 3 を書いたところで止まるので、その 7 は書かれない。止まる位置を数字 1 個の単位まで正確に突き止める必要があるのは、まさにこのためである。

1 から 369 までに現れる 7 を数える。位取り（place value）ごとに数える。どの 7 もち

ょうど1つの位にあるので、二重に数えることはない。77のような数は正しく2回分として数えられる。

- **一の位。** 10個ずつの完全なまとまり $10k, \ldots, 10k+9$ のそれぞれに、7で終わる数がちょうど1つある。0から359までの数は36個の完全なまとまりをなすので、7は36個である：$7, 17, \ldots, 357$。途中までのまとまり360から369でさらに367の1個が加わる。合計37個。
- **十の位。** 100個ずつの完全なまとまりのそれぞれに、十の位が7である数がちょうど10個ある：70–79、170–179、270–279である。まとまり370–379は369を超えている。合計30個。
- **百の位。** 369までのどの数も、百の位は高々3である（あるいは百の位がない）。合計0個。

最後に1つだけ書いた3は何も加えない。よって、数字7が使われる回数は

$$37 + 30 + 0 = 67 \text{ 回である。}$$

小問 (ii)

N を10進法で表したときの末尾の0の個数は、$10^k \mid N$ となる最大の k である。$10 = 2 \times 5$ であるから、これは N の素因数分解（prime factorisation）における2の指数と5の指数のうち小さい方に等しい。

5を数える。 365! を割り切る5の最大のべきの指数は、$j = 1, \ldots, 365$ にわたって j に含まれる因数5の個数を足し合わせたものである。5の倍数は少なくとも1個の因数を与え、25の倍数は2個目を、125の倍数は3個目を与え、以下同様である。各層を別々に数えると、

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \tfrac{365}{5} \right\rfloor &= 73 && \text{（5の倍数），} \\
\left\lfloor \tfrac{365}{25} \right\rfloor &= 14 && \text{（25の倍数），} \\
\left\lfloor \tfrac{365}{125} \right\rfloor &= 2 && \text{（125の倍数：125, 250），} \\
\left\lfloor \tfrac{365}{625} \right\rfloor &= 0. &&
\end{aligned}$$

ちょうど 5^m で割り切れる数は、最初の m 行のそれぞれで1回ずつ数えられるので、本来あるべきとおりちょうど m を与える。したがって、365! における5の指数は

$$73 + 14 + 2 = 89.$$

2は制約にならない。 2について同じ議論をすると、因数2は少なくとも $\lfloor 365/2 \rfloor = 182 > 89$ 個ある。（実際には $182 + 91 + 45 + 22 + 11 + 5 + 2 + 1 = 359$ 個である。）よって $2^{89} \cdot 5^{89} = 10^{89}$ は 365! を割り切るが、$5^{90} \nmid 365!$ であるから 10^{90} は割り切らない。

ゆえに、365! の末尾にはちょうど **89** 個の 0 が並ぶ。

検算

(i) について、止まる位置を手早く確かめる：$9 + 180 + 3 \times 270 = 999$ 個の数字で 369 の終わりまで達し、その次の数字は 370 の先頭の 3 である。最初の 1000 個の数字をコンピュータで書き出して数えると、7 は 67 個であり、そのうち 20 個が 1–99 に、47 個が 100–369 にあることが確認できる。(ii) については、365! を正確に計算し（779 桁ある）、末尾の 0 を数える。0 は 89 個あり、5 の個数と一致する。手で方法を確かめられる小さな例として、25! の末尾の 0 は $\lfloor 25/5 \rfloor + \lfloor 25/25 \rfloor = 6$ 個のはずであり、実際 $25! = 15\,511\,210\,043\,330\,985\,984\,000\,000$ である。

よくある間違い

- 370（さらには 371–379 まで）を書いたものとして数え、68 以上の答えを出してしまう。
- $\lfloor 365/5 \rfloor = 73$ だけを使い、25、50、... には 5 が 2 個、125、250 には 3 個含まれることを忘れる。
- 7 を数字ごとではなく数ごとに数えてしまい、77、177、277 を 2 回ではなく 1 回しか数えない。

STEP のその先へ

(ii) の層ごとの数え方はルジャンドル（Legendre）の公式（Legendre's formula）である：素数 p について、$n!$ における p の指数は $\sum_{k \geq 1} \lfloor n/p^k \rfloor$ であり、これは $(n - s_p(n))/(p-1)$ にも等しい。ここで $s_p(n)$ は n を p 進法で表したときの各桁の数字の和である。今の場合 $365 = 2430_5$ で、各桁の和は 9 であり、$(365 - 9)/4 = 89$ となる。この公式は、二項係数（binomial coefficients）の素因数に関するクンマー（Kummer）の定理の基礎になっている。この種の初等整数論（elementary number theory）をさらに探究するには、Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）がすばらしい手引きとなる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。