解答例

# STEP I 見本問題、第 4 問

純粋数学 ・ 置換積分

**STEP I 見本問題、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s1-q4

## 鍵となる考え方

2 次式の平方根が現れたら、まず平方完成（completing the square）をする。ここでは根号の中の 2 次式が $(x+1)^2-3$ となり、根号の外の因数もまた $x+1$ であるから、$u=x+1$ と平行移動すれば $\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-3}}$ という整った形が残る。この形（変数と、その 2 乗から定数を引いたものの平方根との積）は、まさに sec による置換（secant substitution）、あるいは同じく逆数による置換 $t=1/u$ が扱うためにあるような形である。どちらの置換を用いても、無限区間は有限区間に変わる。

## 解答

### 平方完成

$$x^2+2x-2=(x+1)^2-3,$$

である。$x\geq 1$ ならば $(x+1)^2\geq 4>3$ であるから、これは正であり、したがって被積分関数（integrand）は $[1,\infty)$ 全体で定義される。$u=x+1$ とおくと、$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ であり、$x=1$ のとき $u=2$、$x\to\infty$ のとき $u\to\infty$ である。よって

$$I=\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-2}}=\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-3}}.$$

$u$ が大きいとき被積分関数は $1/u^2$ のように振る舞うので、この積分は収束（converge）する。

### sec による置換

$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ として $u = \sqrt{3}\sec\theta$ とおく。すると

$$\mathrm{d}u = \sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta, \qquad \sqrt{u^2-3} = \sqrt{3(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{3}\tan\theta,$$

となる。ここで、この範囲では $\tan\theta \ge 0$ であることを用いて絶対値を外した。

**考えてみよう** 新しい積分区間の端はどうなるか。

$u = 2$ では $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$、すなわち $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ でなければならないから、$\theta = \frac{\pi}{6}$ である。$u \to \infty$ のとき $\sec\theta \to \infty$ であるから、$\theta$ は下から $\theta \to \frac{\pi}{2}$ となる。この置換は $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ で増加するので、積分区間の端の順序は保たれる。

これで、すべてが約分される。

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{3}\sec\theta\cdot\sqrt{3}\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

したがって

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{9}.$$

### 別解：逆数による置換

sec が思い浮かばなくても、$t = 1/u$ で同じようにうまくいき、しかも積分区間がすぐに有限になる。$u = 1/t$ とすると $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t/t^2$ であり、$t > 0$ に対して

$$u\sqrt{u^2-3} = \frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-3t^2}}{t} = \frac{\sqrt{1-3t^2}}{t^2}.$$

積分区間の端 $u = 2$ と $u \to \infty$ はそれぞれ $t = \frac{1}{2}$ と $t \to 0$ になり、負の符号によって上端と下端が入れ替わる。

$$I = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-3t^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(\sqrt{3}\,t)\right]_0^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3},$$

これは最初の方法の結果と一致する。

## 検算

- 原始関数（antiderivative）$F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$ を微分すると被積分関数に戻る。そして $F(\infty) - F(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ である。

- 大きさの大まかな確認：$[1,\infty)$ 上で被積分関数は $1/(x+1)^2$ より少し大きく、後者の積分は $\frac{1}{2}$ である。求めた答えは $\pi/(3\sqrt{3}) \approx 0.6046$ であり、当然そうあるべきとおり、$\frac{1}{2}$ をわずかに上回っている。
- もとの積分を数値積分（numerical quadrature）すると（区間を分割し、無限に延びる部分は $x = 1/w$ によって取り除く）0.604600 となり、$\pi/(3\sqrt{3}) = 0.6045998\ldots$ と一致する。

## よくある間違い

- 積分区間の端の変更を忘れること。下端は 0 ではなく $\theta = \frac{\pi}{6}$ である。0 を用いると誤った答え $\pi/(2\sqrt{3})$ が得られてしまう。
- 用いる範囲で $\tan\theta$ の符号を確かめずに $\sqrt{\sec^2\theta - 1} = \tan\theta$ と書くこと。
- 極限をきちんととらずに、$\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsec}(\ldots)$ に「無限大を代入した」ままの形で答えを放置すること。

## STEP のその先へ

これは広義積分（improper integral）である。厳密には $\lim_{X\to\infty}\int_1^X$ を意味し、大学 1 年次の解析学（analysis）の講義では、このような極限がいつ存在するかが厳密に扱われる（$\int^\infty u^{-2}\,\mathrm{d}u$ との比較が標準的な判定法である）。また、ここで用いた置換は、有理式 $R$ に対する $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ の積分という一般論の出発点でもある。このような積分は、常に有理関数（rational function）の積分に帰着できる。広義積分と比較判定法（comparison test）については、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。