解答例

STEP I 見本問題、第 3 問

純粋数学 • 2 階微分方程式

> **STEP I 見本問題、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q3

鍵となる考え方

二階の微分方程式（second-order equation）は難しいが、一階の微分方程式（first-order equation）が二つなら易しい。示された置換（substitution）$z = y' - y$（$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ を y' と書く）は、左辺が z と z' だけを含む式にまとまるように選ばれている。すると z についての一階線形（linear）微分方程式が残り、続いて y についてもう一つの一階線形微分方程式が得られる。どちらも積分因子（integrating factor）によって解ける。

解答

階数を下げる

$z = y' - y$ とおくと $z' = y'' - y'$ である。これに合わせて方程式の左辺を分解する。

$$y'' + 2y' - 3y = (y'' - y') + 3(y' - y) = z' + 3z.$$

したがって方程式は

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + 3z = 2\mathrm{e}^x.$$

となる。初期条件（initial conditions）から $z(0) = y'(0) - y(0) = 2 - 1 = 1$ である。

> ? **考えてみよう** 分解 $(y'' - y') + 3(y' - y)$ にはどうすれば気づけただろうか？

ある定数 k について、$y'' + 2y' - 3y$ が $z' + kz = y'' + (k-1)y' - ky$ に等しくなればよい。y' の項を比較すると $k = 3$ となり、このとき $-ky = -3y$ も一致する。（これがうまくいくのは、1 が特性方程式（auxiliary equation）$m^2 + 2m - 3 = (m-1)(m+3) = 0$ の解だからである。もう一つの解 -3 が $z' + 3z$ に現れている。）

z を求める

積分因子 e^{3x} を掛けると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(z\mathrm{e}^{3x}) = 2\mathrm{e}^{4x} \quad \Longrightarrow \quad z\mathrm{e}^{3x} = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{4x} + A.$$

$x = 0$ において $1 = \frac{1}{2} + A$ であるから $A = \frac{1}{2}$ となり、

$$z = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-3x}).$$

y を求める

次に $y' - y = z$、すなわち

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-3x}).$$

である。積分因子は e^{-x} であり、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\mathrm{e}^{-x}) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-4x},$$
$$y\mathrm{e}^{-x} = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-4x} + B.$$

$x = 0$ において $1 = -\frac{1}{8} + B$ であるから $B = \frac{9}{8}$ である。両辺に e^{x} を掛けて、

$$\boxed{y = \left(\frac{x}{2} + \frac{9}{8}\right)\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3x} = \frac{(4x+9)\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-3x}}{8}}$$

ここでは $y(0) = 1$ しか使っていないことに注意しよう。条件 $y'(0) = 2$ は $z(0)$ を求める際にすでに使っているので、両方の条件が適用されている。

検算

- $y(0) = (9-1)/8 = 1$ であり、$y' = \big((4x+13)\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{-3x}\big)/8$ から $y'(0) = 16/8 = 2$ が得られる。
- 代入による確認：e^{-3x} は斉次方程式（homogeneous equation）の解であり（$9 - 6 - 3 = 0$）、e^{x} も解である（$1 + 2 - 3 = 0$）。$x\mathrm{e}^{x}$ については、$y'' + 2y' - 3y = (x+2) + 2(x+1) - 3x = 4$ に e^{x} を掛けたものとなるので、$\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x}$ はちょうど $2\mathrm{e}^{x}$ を与える。
- 数値的には、もとの方程式をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で $x = 0$ から進めると $y(1) \approx 4.41098$ となり、$(13\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-3})/8$ と一致する。

よくある間違い

- 最後にもう一度 $y'(0) = 2$ を適用してしまう、あるいはそれを $z(0) = 1$ に変換し忘れる。
- 置換を使わずに特解（particular integral）として $c\,\mathrm{e}^x$ を試すこと。e^x はすでに斉次方程式の解なのでこれはうまくいかず、代わりに $cx\mathrm{e}^x$ が必要になる。置換を使えば、この点は自動的に処理される。

STEP のその先へ

この置換は、実は微分作用素（differential operator）の因数分解である。$\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ を D と書くと、方程式は $(D+3)(D-1)y = 2\mathrm{e}^x$ であり、$z = (D-1)y$ である。このように作用素を因数分解することで、定数係数（constant-coefficient）線形微分方程式の理論全体が説明でき、重根（repeated root）や「共鳴（resonant）」する根があるとなぜ余分な因子 x が現れるのかもわかる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『初等微分方程式』）は、この理論を体系的に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。