解答例

STEP I 見本問題、第 2 問

純粋数学 ・ 三角関数と最適化

> **STEP I 見本問題、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q2

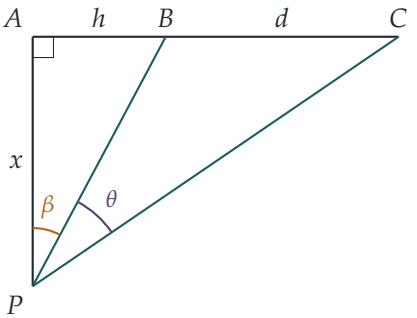
鍵となる考え方

角 θ は、P における二つの角の**差**であり、それぞれの角は A に直角をもつ直角三角形（right-angled triangle）の中にある。それらの正接（tangent）は図から直接読み取れるので、tan の差の公式（subtraction formula）を使えばよい。最大値については、$\tan\theta$ を x が一箇所にしか現れない形、すなわち $x + (\text{定数})/x$ の形に書けば、微分を使わずに相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）で決着がつく。

解答

$\tan\theta$ を求める

$\alpha = \angle APC$、$\beta = \angle APB$ とおく。B は A と C の間にあるので、$\theta = \alpha - \beta$ である。



直角三角形 PAC と PAB（直角は A）において、

$$\tan\alpha = \frac{AC}{AP} = \frac{h+d}{x}, \qquad \tan\beta = \frac{AB}{AP} = \frac{h}{x}.$$

差の公式より、

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{h+d}{x} - \dfrac{h}{x}}{1+\dfrac{h(h+d)}{x^2}}.$$

分子と分母に x^2 を掛けると、

$$\boxed{\tan\theta = \frac{dx}{x^2+h(h+d)}}$$

（分母 $1+\tan\alpha\tan\beta$ は正なので、この公式が破綻することはない。）

θ を最大にする

考えてみよう $\tan\theta$ を最大にすることは、θ を最大にすることと同じだろうか？

この場合はそうである。α と β はともに 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間に（端点を含まずに）あり、さらに $\alpha > \beta$ であるから、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ となる。この区間で tan は狭義単調増加（strictly increasing）なので、θ が最大となるのは $\tan\theta$ が最大となるときである。

分子と分母を $x > 0$ で割ると、

$$\tan\theta = \frac{d}{x+\dfrac{h(h+d)}{x}}.$$

ここで d は固定されているので、$\tan\theta$ が最大になるのは分母 $x+h(h+d)/x$ が最小になるときである。二つの項はともに正なので、相加平均・相乗平均の不等式より

$$x+\frac{h(h+d)}{x} \geq 2\sqrt{x\cdot\frac{h(h+d)}{x}} = 2\sqrt{h(h+d)},$$

であり、等号が成り立つのは二つの項が等しいとき、すなわち $x = h(h+d)/x$、つまり $x^2 = h(h+d)$ のときに限る。したがって、分母が最小値をとり、θ が最大値をとるのは

$$\boxed{x = \sqrt{h(h+d)}}$$

のときであり、このとき $\tan\theta = \dfrac{d}{2\sqrt{h(h+d)}}$ である。

微分を用いる方法。 $k = h(h+d)$、$f(x) = dx/(x^2+k)$ とおくと、商の微分法（quotient rule）より

$$f'(x) = \frac{d\,(k-x^2)}{(x^2+k)^2},$$

となる。これは $0 < x < \sqrt{k}$ で正、$x > \sqrt{k}$ で負であるから、f は増加して $x = \sqrt{k}$ でただ一つの極大値をとり、その後は減少する。相加平均・相乗平均の不等式を使う方が速く、しかもこれが全体での最大値（global maximum）であることが一目でわかる。

検算

- 極限：$x \to 0$ または $x \to \infty$ のとき、公式から $\tan\theta \to 0$ となる。これは正しい。A のごく近くからでも非常に遠くからでも、線分 BC を P から見込む角（subtended angle）はほとんどない。したがって、その間に最大値があるはずである。
- 対称性：$\tan\theta$ は x を $h(h+d)/x$ に置き換えても変わらないので、最大値はこの入れ替えの不動点（fixed point）$x = \sqrt{h(h+d)}$ でとられるはずである。$h = 2$、$d = 1$ のとき、$x = 2$ と $x = 3$ では同じ角（約 $11.31°$）が得られ、$x = \sqrt{6}$ における最大値は約 $11.54°$ である。
- $h = 1$、$d = 3$ のとき：$x = 2$ であり、$\tan\theta = 6/8 = \frac{3}{4}$ となる。これは 3–4–5 の直角三角形の角で、$36.87°$ である。θ を座標から直接計算する方法で、20 000 組のランダムな (h, d, x) について調べたところ、公式と 10^{-14} の精度で一致した。また、最大を与える x を数値的に探索した結果も、すべて $\sqrt{h(h+d)}$ と一致した。

よくある間違い

- $\tan\theta = d/x$ と書いてしまう。これは θ が直角三角形の中にあるかのように扱っているが、そうではない。直角は A にあり、BC 上にはない。
- $\tan\theta$ を最大にしておきながら、それがなぜ θ を最大にすることになるのかを述べない。そのためには、θ が tan の増加する区間にとどまっていることが必要である。

STEP のその先へ

この答えには美しい幾何学的な解釈がある。BC を一定の角で見込む点は、B と C を通る円の弧の上にある。角が最大になるのは、直線 AP と共有点をもつそのような円のうち最小のもの、すなわち P においてその直線に**接する**円の上である。すると方べきの定理（tangent–secant theorem、点 A の方べき（power of a point））により $AP^2 = AB \cdot AC$ となり、これはまさに $x^2 = h(h+d)$ である。これはレギオモンタヌス（Regiomontanus）の問題であり、しばしば「台座の上の像を最もよく見るには、どこに立てばよいか？」という形で出題される。ある量を最適化するとき、まずそれと同時に増減し、しかも扱いやすい別の量に置き換えるという考え方は、大学 1 年次の解析学（first-year analysis）を通じて繰り返し現れるテーマである。Siklos の *Advanced*

Problems in Mathematics には、この精神に沿った問題がさらに数多く収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。