解答例

STEP I 見本問題、第 15 問

確率・統計 ・ 確率変数の和

> **STEP I 見本問題、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q15

鍵となる考え方

C の一見奇妙な分布（distribution）は、価格の末尾の数字が $0, 1, \ldots, 9$ のどれである確率も等しいとすれば、1 つの価格を 10 ペンス単位に四捨五入したときに生じる誤差そのものである。このとき買い物客の誤差の合計は C と同じ分布をもつ 36 個の独立（independent）な確率変数の和となるので、その平均と分散はただちに求まり、20 ペンスの食い違いがどれほど意外なものかは中心極限定理（Central Limit Theorem）が教えてくれる。

解答

C の期待値と分散

すべての i について $\mathrm{P}(C = i) = \mathrm{P}(C = -i)$ であるから、この分布は 0 に関して対称（symmetric）である。したがって項 $i\,\mathrm{P}(C = i)$ は対ごとに打ち消し合い、

$$\mathrm{E}(C) = 0.$$

である（確率の総和は確かに 1 である：$9 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{20} = 1$）。平均が 0 であるから、分散（variance）は単に $\mathrm{E}(C^2)$ に等しい：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(C) = \mathrm{E}(C^2) &= 2 \cdot \frac{25}{20} + \frac{2}{10}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) \\ &= \frac{5}{2} + \frac{2 \cdot 30}{10} = \frac{17}{2}.\end{aligned}$$

買い物客の見積もり

モデル。 1 つの商品について、実際の価格から四捨五入後の価格を引いたものをペンス単位で C とする。これは価格の末尾の数字 d だけで決まる。d は $0, 1, \ldots, 9$ のどれである確率も等しいと仮定する。ここで「無作為に」買うというのはこういう意味であるべきだが、これは実際の価格についての仮定である。

- $d = 0$：四捨五入は起こらないので $C = 0$。
- $d = 1, 2, 3, 4$：価格は d だけ切り下げられるので $C = d$。
- $d = 6, 7, 8, 9$：価格は $10 - d$ だけ切り上げられるので $C = -(10 - d)$、すなわち $-4, -3, -2, -1$ となる。
- $d = 5$：価格は等しい確率で切り下げられるか切り上げられるので、$C = 5$ または -5 であり、それぞれの確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$ である。

$-4, \ldots, 4$ のそれぞれはちょうど 1 つの数字から確率 $\frac{1}{10}$ で生じ、± 5 の確率はそれぞれ $\frac{1}{20}$ である。これはまさに前半の分布であり、だからこそ前半はあのように設定されていたのである。

誤差の合計。 36 個の商品の誤差を $C_1, \ldots, C_{36}$ とし、

$$S = C_1 + C_2 + \cdots + C_{36}$$

を真の請求額から買い物客の見積もりを引いたものとする。商品は無作為に選ばれるので、C_j は互いに独立で、それぞれ C と同じ分布に従うとみなす。すると

$$\mathrm{E}(S) = 36 \cdot 0 = 0, \qquad \mathrm{Var}(S) = 36 \cdot \tfrac{17}{2} = 306,$$

となる（分散の計算には独立性を用いた）。よって S の標準偏差（standard deviation）は $\sqrt{306} \approx 17.5$ ペンスである。

> **考えてみよう** 20 ペンスは大きな食い違いだろうか、それとも小さな食い違いだろうか。

これは 1 回の四捨五入の誤差の大きさとではなく、標準偏差と比べなければならない。レジの請求額は見積もりより 20 ペンス高いので、$S = 20$ である。これは平均より

$$\frac{20}{\sqrt{306}} \approx 1.14$$

標準偏差だけ上にある。S は独立同分布な 36 個の確率変数の和であるから、中心極限定理により S は近似的に $\mathrm{N}(0, 306)$ に従う。（S は整数値をとるので）連続性補正

（continuity correction）を行うと、

$$\mathrm{P}(S \geq 20) \approx \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{19.5}{\sqrt{306}}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 1.11) \approx 0.13,$$

となる。ただし $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ である。（どちらの向きであれ）少なくともこれだけ大きな誤差は、およそ 26% の確率で起こる。

したがって、買い物客は誤りを疑うべきでは**ない**。20 ペンスの差は四捨五入の誤差の通常のばらつき、つまりおよそ 1 標準偏差の範囲に十分収まっており、7 回か 8 回の買い物に 1 回程度は起こることである。標準偏差のおよそ 2 倍を超える食い違い、たとえば 35 ペンス以上であって初めて、本当に疑う根拠になる。

検算

- 価格を 10 ペンス単位に四捨五入すると変化は高々 5 ペンスなので、36 個の商品での最悪の場合は 180 ペンスである。典型的な誤差がおよそ 17 ペンスとこれよりはるかに小さいのは当然である。正の誤差と負の誤差が大部分打ち消し合うからである。
- コンピュータで、四捨五入の誤差がちょうど C の分布をもち、$\mathrm{E}(C) = 0$、$\mathrm{Var}(C) = \frac{17}{2}$ であることを確かめた。さらに分数を用いて 36 個の畳み込み（convolution）を厳密に計算したところ、$\mathrm{Var}(S) = 306$、$\mathrm{P}(S \geq 20) \approx 0.1330$ となった。これに対し正規近似（normal approximation）では 0.1325、2×10^5 回の買い物のシミュレーションでは 0.132 であった。

よくある間違い

- $\mathrm{Var}(S)$ を $36^2\,\mathrm{Var}(C)$ としてしまう。これは $36C$、つまり 1 つの誤差を 36 回繰り返したものの分散である。独立な誤差については、分散は単に足し合わされる。
- S がちょうど 20 となる確率（およそ 0.012）を意外さの尺度とみなしてしまう。S の個々の値はどれもかなり起こりにくい。重要なのは、観測された誤差と少なくとも同じ大きさの誤差が起こる確率である。
- 何を仮定しているかを述べ忘れる。すなわち、価格の末尾の数字が一様分布（uniform distribution）に従い、各商品の誤差が独立であるという仮定である。

STEP のその先へ

これは仮説検定（hypothesis test）の背後にある推論である。何も問題は起きていない（ここでは S は単なる四捨五入の誤差である）と仮定し、観測された結果と少なくとも同じくらい極端な結果がどれほど起こりやすいかを問うのである。同じ四捨五入の誤差の解析は数値解析（numerical analysis）でも用いられ、そこでは多数の数を四捨五入したときの誤差は、通常その個数に比例してではなく、個数の平方根のように増大する。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、確率変数（random variable）の和と中心極限定理をわかりやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。