解答例

STEP I 見本問題、第 14 問

確率・統計 ・ 期待値

STEP I 見本問題、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s1-q14

鍵となる考え方

すべては一つの表にかかっている。公平な 4 面のさいころ 2 個の目の和の分布（distribution）である。これが得られれば、どの予想 x に対しても期待利得（expected gain）は「賞金 × 勝つ確率 − 罰金 × 負ける確率」にすぎない。面白いのは、大きな予想ほど賞金は大きいが勝つ確率は小さいという緊張関係があることで、すべてを比べてみるまでは最良の予想は明らかでない。

解答

目の和を S とする。各さいころは $1,2,3,4$ をそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で独立に（independently）出すので、16 通りの順序対はどれも同様に確からしい。各和をとる対を数えると、次のようになる。

s	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{P}(S=s)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

（たとえば、$S=5$ となるのは $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$ のときである。）

B が x と予想し、$p=\mathrm{P}(S=x)$ とすると、B の利得 G（ペンス）は確率 p で $100x^2$、確率 $1-p$ で $-50x$ である。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(G) &= 100x^2p - 50x(1-p)\\ &= 50x[(2x+1)p-1].\end{aligned}$$

x をつくる方法の数を k として $p=\frac{k}{16}$ と書くと、

$$\mathrm{E}(G)=\frac{25x[k(2x+1)-16]}{8}.$$

小問 (i)

和が 8 になるのは $(4,4)$ だけなので $p = \frac{1}{16}$ であり、

$$\mathrm{E}(G) = 6400 \cdot \frac{1}{16} - 400 \cdot \frac{15}{16} = 400 - 375 = 25,$$

となる。よって、8 と予想したときの B の期待利得は、求めるとおり 25 ペンスである。

小問 (ii)

$2, 3, \ldots, 8$ 以外の予想は決して勝てないので（目の和は正であるから x は正とする）、損をするだけである。起こりうる 7 つの和について、上の式から次の表が得られる。

x	2	3	4	5	6	7	8
k	1	2	3	4	3	2	1
$\mathrm{E}(G)$（ペンス）	−68.75	−18.75	137.5	437.5	431.25	306.25	25

たとえば $x = 5$ のとき、$\mathrm{E}(G) = \frac{25 \cdot 5\,(4 \cdot 11 - 16)}{8} = \frac{125 \cdot 28}{8} = 437.5$ である。

考えてみよう 賞金は x^2 のように増えるのに、なぜ 7 や 8 のような大きな予想が最良ではないのだろうか？

賞金はたしかに急速に増えるが、勝つ確率は 5 の両側で減っていき、しかも罰金ははるかに起こりやすい「外れ」の場合に支払われる。$x = 8$ では確率が $\frac{1}{16}$ まで下がり、大きな賞金をほぼちょうど打ち消してしまう。二つの効果が最もよく釣り合うのは中央付近である。$x = 6$ は $x = 5$ より賞金が大きいが、勝ち方が 4 通りではなく 3 通りしかなく、わずかに及ばない。

したがって、B には $\boxed{x = 5}$ と予想するよう勧める。期待利得は 1 回あたり 437.5 ペンス、すなわち £4.375（約 £4.38）である。

検算

- 表の確率の和は $\frac{16}{16} = 1$ である。
- 小問 (i) はちょうど 25 になり、表と式が正しいことを裏づけている。
- 5 と予想するゲームを 400 000 回シミュレーションしたところ、平均利得は約 437.2 ペンスであり、正確な値 437.5 とよく合った。

よくある間違い

- 和 2 から 8 を同様に確からしいとみなすこと。同様に確からしい結果は 16 通りの順序対であるから、そうはならない。
- B が $50x$ を失うのは確率 1 ではなく確率 $1-p$ であることを忘れること。
- 賞金が大きいからといって $x=6$ や $x=7$ で止めてしまうこと。5 と 6 は僅差なので、すべての値を計算しなければならない。

STEP のその先へ

これは小さな意思決定問題である。期待される報酬を最大にする行動を選ぶのである。大学では同じ考え方が決定理論（decision theory）や、独立な確率変数（random variable）の和の研究に現れる。そこでは和の分布は**畳み込み**（convolution）によって求められ（ここでは表の三角形の形がそれにあたる）、さいころが多数になると中心極限定理（central limit theorem）により正規分布の曲線に近づく。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）はその両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。