解答例

STEP I 見本問題、第 13 問

力学 ・ 円運動

> **STEP I 見本問題、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q13

鍵となる考え方

これは、糸が伸びることのできる円錐振り子（conical pendulum）である。フックの法則（Hooke's law）は張力（tension）を糸の長さに結びつけ、一方で力を鉛直方向と水平方向に分解すると、張力が g および ω に結びつく。糸は鉛直方向と 0 でない角をなすので、張力は真に mg より大きくなければならない。この一つの事実が、二つの不等式の両方を導くのである。

解答

粒子を、フックの法則に従う軽い弾性糸につながれた質点（point mass）としてモデル化し、空気抵抗は無視する。λ を弾性係数（modulus of elasticity）とする。

弾性係数。 静止してつり下がっているとき、糸の伸び（extension）は $2a - a = a$ であり、張力は重力とつり合う：

$$mg = \frac{\lambda a}{a} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = mg.$$

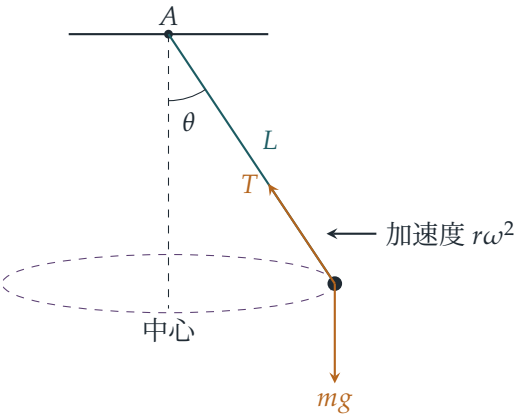
したがって、糸の長さが L のとき、その張力は

$$T = \frac{mg(L-a)}{a}.$$

である。

円運動。 粒子が A の下方で水平な円を描いて運動し、長さ L の糸が鉛直下向きと角 θ をなすとする。運動は A の高さより下での本当の円運動であるから、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であ

り、したがって $\sin\theta > 0$ かつ $0 < \cos\theta < 1$ である。円の中心は A の真下にあり、半径は $r = L\sin\theta$ である。



A を通る鉛直線のまわりの粒子の角速度（angular speed）は ω であるから、その加速度は $r\omega^2 = L\omega^2\sin\theta$ であり、水平に中心へ向かう。鉛直方向の加速度はない。

鉛直方向に分解すると

$$T\cos\theta = mg. \tag{1}$$

水平方向に、中心へ向かう向きに分解すると

$$T\sin\theta = mL\omega^2\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad T = mL\omega^2, \tag{2}$$

となる。ここで $\sin\theta \neq 0$ であるから $\sin\theta$ で割ってよい。

考えてみよう 円運動が本当の円運動である（粒子が単に静止してつり下がっているのではない）という事実は、どこで使われているか？

それは二度使われている。(2) で $\sin\theta$ で割るところと、後で $\cos\theta < 1$ とするところである。もし $\theta = 0$ ならば、粒子は単に軸上で静止してつり下がっているだけであり、(2) は何も主張せず、どんな ω でも「成り立って」しまう。

糸は $2a$ より長い。 (1) より、$0 < \cos\theta < 1$ であるから

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} > mg.$$

フックの法則を用いると、これは

$$\frac{mg(L-a)}{a} > mg \quad\Longrightarrow\quad L - a > a \quad\Longrightarrow\quad L > 2a,$$

を意味する。したがって、糸は $2a$ より長く伸ばされている。

ω の範囲。 フックの法則から得られる T の式と (2) から得られる式を等しいとおくと

$$mL\omega^2 = \frac{mg(L-a)}{a} \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{g}{a}\left(1 - \frac{a}{L}\right).$$

$L > 2a$ であるから $0 < \frac{a}{L} < \frac{1}{2}$ であり、よって $\frac{1}{2} < 1 - \frac{a}{L} < 1$ である。したがって

$$\frac{g}{2a} < \omega^2 < \frac{g}{a},$$

となり、これが示すべきことであった。

逆（converse）（要求されてはいないが、安心のために）。 ω がこの範囲にあるとき、$L = \dfrac{a}{1 - a\omega^2/g}$ とおく。これは正であり、$L > 2a$ を満たし、$\cos\theta = \dfrac{mg}{T} = \dfrac{a}{L-a}$ を与える。この値は 0 と 1 の間に真に含まれる。したがって、そのようなすべての ω に対して、円錐運動が実際に存在する。

検算

- 極限：$L \to 2a$ のとき、張力は mg に近づき、$\theta \to 0$ かつ $\omega^2 \to g/(2a)$ となる。これは長さ $2a$ の単振り子（simple pendulum）の微小振動の振動数である。$L \to \infty$ のときは $\omega^2 \to g/a$ となる。
- 数値的に：$\omega^2 = \frac{3}{4}\,g/a$ とすると、$L = 4a$、$T = 3mg$、$\cos\theta = \frac{1}{3}$ が得られる。この初期条件から三次元の運動方程式を数値的に 2 周分進めたところ、粒子は予測された円上に、単位長さの 10^{-13} 以内の精度でとどまった。
- 単位：g/a の単位は s^{-2} であり、ω^2 の単位として正しい。

よくある間違い

- 円の半径を $L\sin\theta$ ではなく L としてしまう。そうすると (2) で $\sin\theta$ が約分されなくなる。
- $T > mg$ には $\cos\theta < 1$、すなわち $\theta \neq 0$ が必要であることを忘れる。真の不等式はこのことに依存している。
- 伸びた長さ L の代わりに、自然長（natural length）a（あるいはつり合いの長さ $2a$）を半径として用いてしまう。

STEP のその先へ

下限 $\omega^2 = g/(2a)$ は鉛直線のまわりの微小振動の振動数であり、これは偶然ではない。軸の近くでの定常な円錐運動は、位相が 4 分の 1 周期ずれた、互いに垂直な二つの微小振動にほかならないのである。上限は、糸がどれほど伸びても、糸の硬さがもはや向心力（centripetal force）を供給できなくなるところである。定常運動（steady motion）とその安定性（stability）を調べること、たとえば粒子が円軌道から少しずらされたときに何が起こるかを問うことは、大学 1 年の力学における標準的な話題である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、円錐振り子と回転系における運動の解析を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。