解答例

STEP I 見本問題、第 12 問

力学 ・ 摩擦を伴う衝突

STEP I 見本問題、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s1-q12

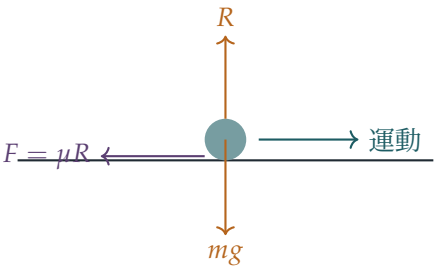
鍵となる考え方

ここでは摩擦がすべての働きを担っている。水平な氷の上を滑る円板には一定の減速させる力がはたらくので、その減速度は一定であり、出来事と出来事の間の運動は姿を変えた「等加速度運動」にすぎない。最後から逆向きにたどっていこう。B の停止距離から衝突後の速さが決まり、衝突の法則によってそれが衝突直前の A の速さに変換され、もう一度等加速度運動の計算を行えば O での出発時に戻れる。

解答

モデル

各円板を、摩擦係数（coefficient of friction）μ の水平で粗い面上にある質量 m の質点（particle）とみなす。円板が滑っている間、それにはたらく力は、下向きの重力 mg、上向きの垂直抗力（normal reaction）R、そして運動を妨げる向きの最大摩擦力（limiting friction）F である。



鉛直方向に力を分解（resolving）すると、鉛直方向の加速度はないので $R = mg$ である。円板は滑っているので摩擦力は最大摩擦力であり、$F = \mu R = \mu mg$ となる。水平方向に分解すると $m\ddot{x} = -\mu mg$ なので、滑っている円板はすべて一定の割合

$$a = \mu g,$$

で減速し、これは円板の質量によらない。また、衝突は瞬間的に起こると仮定する。したがって衝突そのものの間に摩擦がはたらく時間はなく、そのとき問題になるのは円板どうしの間の衝突力だけであり、OC 方向の運動量（momentum）は保存される。

衝突後の B の速さ

B は O から距離 d の点から出発し、O から距離 $2d$ の点 C で止まるので、滑る距離は d である。衝突直後の速さを w とする。終速度 0、加速度 $-\mu g$、変位 d として $v^2 = u^2 + 2as$ を用いると、

$$0 = w^2 - 2\mu g d \quad \Longrightarrow \quad w = \sqrt{2\mu g d},$$

となり、これが求める結果である。

衝突直前の A の速さ

A が速さ u で B に衝突し、衝突直後の A の速度を v_A とする（どちらも $O \to C$ の向きを正とする）。質量がともに m で等しいので、運動量保存則より

$$mu = mv_A + mw \quad \Longrightarrow \quad u = v_A + w,$$

であり、ニュートンの実験法則（Newton's experimental law）より

$$w - v_A = eu.$$

である。これらを足し合わせると v_A が消去されて $2w = (1+e)u$ となるので、

$$u = \frac{2w}{1+e} = \frac{2\sqrt{2\mu g d}}{1+e}.$$

（代わりに引き算をすると $v_A = \frac{1}{2}(1-e)u \geq 0$ が得られるので、A はより遅い速さで同じ向きに進み続ける。）

> **考えてみよう** A が再び B に追いついて、計算が台なしになることはないだろうか？

ない。衝突後は両方の円板が同じ割合 μg で減速するので、両方が動いている間、速さの差 $w - v_A = eu$ は一定に保たれる。B が A より遅くなることはないので前にあり続

け、また、より遅い速さから動き始める A が先に止まる。したがって衝突はちょうど 1 回だけであり、d から $2d$ までの B の移動は妨げられない。($e = 0$ のときは、両方の円板は止まるまで一体となって動き、やはりそれ以上の衝突は起こらない。)

出発時の速さ

A は O から B まで距離 d を μg で減速しながら滑るので、再び $v^2 = u^2 + 2as$ より

$$u^2 = U^2 - 2\mu g d \quad \Longrightarrow \quad U^2 = u^2 + 2\mu g d.$$

u を代入すると、

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{4 \cdot 2\mu g d}{(1+e)^2} + 2\mu g d = \frac{2\mu g d}{(1+e)^2}(4 + (1+e)^2) \\ &= \frac{2\mu g d}{(1+e)^2}(5 + 2e + e^2). \end{aligned}$$

$U > 0$ かつ $1 + e > 0$ なので正の平方根をとると、

$$U = \frac{\sqrt{2\mu g d}}{1+e}(5 + 2e + e^2)^{\frac{1}{2}},$$

となり、求める式が得られる。

検算

- 完全弾性衝突(perfectly elastic)、$e = 1$ の場合:同じ円板どうしは速度を交換するので、A はぴたりと止まり、B は A の到着時の速さ $u = w$ で動き出す。公式から $U = \sqrt{2}\sqrt{2\mu g d} = \sqrt{2\mu g (2d)}$ が得られ、これはちょうど 1 枚の円板が全距離 $2d$ を滑って C に達するのに必要な速さである。これは理にかなっている。運動量がそのまま受け渡されるのである。
- 完全非弾性衝突(perfectly inelastic)、$e = 0$ の場合:公式から $U = \sqrt{5}\sqrt{2\mu g d}$ が得られ、これは $e = 1$ の場合より大きい。衝突で運動エネルギー(kinetic energy)が失われるのだから、そうなるべきである。より一般に、$(5 + 2e + e^2)/(1+e)^2 = 1 + 4/(1+e)^2$ は e が増加すると減少する。
- 次元(dimensions):μ と e は無次元の数であり、$\sqrt{gd}$ は速さである。
- 数値的には、$\mu = 0.1$、$g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$、$d = 1\ \mathrm{m}$、$e = 0.5$ とすると、公式から $U = \frac{7}{3} \approx 2.33\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ が得られる。この U から小さな時間刻みで運動を逐次計算すると(μ、d、e を無作為に何通りも選んでも)、B は O から $2d$ の 0.001% 以内の位置で静止する。

よくある間違い

- 衝突の前後でエネルギー保存則を適用してしまう。$e = 1$ でない限り、衝突で運動エネルギーは失われる。衝突では運動量と反発の法則（restitution law）を用い、仕事とエネルギーの関係（あるいは $v^2 = u^2 + 2as$）を用いるのは出来事と出来事の間だけにすること。
- A も衝突前に距離 d だけ滑ることを忘れて、$U = u$ と書いてしまう。
- 反発の法則を逆向きに立ててしまう。遠ざかる速さ $w - v_A$ こそが、接近の速さ u の e 倍に等しいのである。

STEP のその先へ

ここで見事なのは、摩擦によって、質量にかかわらずすべての円板が同じ減速度をもつという点である。そのため、μg で減速する座標系（frame）では、両方の円板が滑っている間は氷は実質的に摩擦がないのと同じになり、衝突は教科書どおりのものに見える。都合のよい座標系を選ぶことは大学の力学における中心的な技法であり、摩擦の法則 $F = \mu R$ そのものも経験的なモデルであって、その限界を知っておく価値がある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突と摩擦の両方を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。