解答例

STEP I 見本問題、第 11 問

力学 ・ 摩擦と転がり接触

STEP I 見本問題、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s1-q11

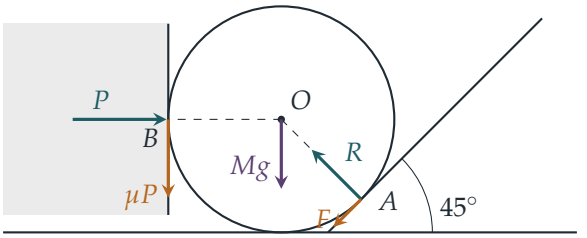
鍵となる考え方

円柱が動き出そうとする瞬間には床が押す力はなくなるので、関係するのは重力、鉛直な面、斜面の三つだけである。「転がる（roll）」とは円柱が斜面上で滑らないことを意味するので、円柱は斜面との接点のまわりに回転し始める。このとき鉛直な面に接している点がどう動くかを調べると、円柱はその面に対して滑らなければならないことがわかる。したがって、摩擦が限界（limiting）に達するのはその面である。あとは中心のまわりのモーメント（moment）の式から、余分な手間なしに斜面の摩擦が求まる。

解答

モデル。円柱は半径 r の一様な剛体（rigid body）とし、その中心 O を通る鉛直断面で問題を考える。装置の面は鉛直で、水平に動く。面との接点を B とすると、これは O と同じ高さにある。斜面との接点を A とする。斜面の傾きは 45° なので、OA は鉛直下向きと 45° をなす。O を原点とし、x を右向き（斜面の方向）、y を上向きにとると、

$$B = (-r, 0), \qquad A = \frac{r}{\sqrt{2}}(1, -1).$$



どの摩擦が限界に達するか

円柱が動き出す直前には、円柱は床から離れようとしているので、床からの垂直抗力（normal reaction）はゼロであり、それに伴って床の摩擦（friction）もゼロである。斜面を転がり上がるためには、円柱は A で滑ってはならないので、その運動は A のまわりの回転として始まり、中心は斜面に沿って $(1,1)$ の方向に上っていく。この回転は時計回りである。角速度（angular speed）を ω とすると、円柱上の点 X の速度は、$X-A$ を時計回りに 90° 回転させたものの ω 倍、すなわち $X-A=(x,y)$ に対して $\omega\,(y,-x)$ である。$X=B$ のとき、

$$B-A=r\Big(-1-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)\quad\Longrightarrow\quad \mathbf{v}_B=\omega r\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\,1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

面は水平にしか動かないが、B の速度には上向きの成分があるので、B は面に沿って上に滑る。円柱は両方の面の上で同時に転がることはできないので、鉛直な面の上で滑らなければならず、**摩擦が限界に達するのは鉛直な面である**。摩擦は滑りを妨げる向きに働くので、円柱には大きさ μP の摩擦が**下向き**に働く。斜面では滑りがないので、斜面の摩擦 F は釣り合いが要求する値をとり、制約は $F\le \nu R$ だけである。（斜面の摩擦係数（coefficient of friction）を ν と書く。問題文では v と印刷されている。）

> ? **考えてみよう** なぜ斜面のほうで摩擦が限界に達することはありえないのか。

円柱が A で滑るなら、それは斜面を転がるのではなく滑り上がっていることになる。転がるとは A で滑らないことである。上の計算から、転がるならば B で滑りが生じることがわかるので、摩擦が垂直抗力の μ 倍に達する接点は B である。

P を求める

斜面の垂直抗力を R とし、これは AO の方向（方向 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$）に働く。斜面の摩擦を F とし、斜面に沿って**下向き**（方向 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$）を正とする。

O のまわりのモーメント。重力、P、R はいずれも O を通る。B における摩擦 μP は距離 r のところに働き、円柱を反時計回りに回そうとする。A における摩擦 F は接線方向なので、これも距離 r のところに働き、斜面に沿って下を向くときは円柱を時計回りに回そうとする。よって

$$\mu P\,r=Fr\quad\Longrightarrow\quad F=\mu P.$$

したがって、斜面の摩擦は確かに斜面に沿って下向きに働き、その大きさは面での摩擦と等しい。

水平方向の釣り合い：

$$P-\frac{R}{\sqrt{2}}-\frac{\mu P}{\sqrt{2}}=0\quad\Longrightarrow\quad R=\sqrt{2}\,P-\mu P=P(\sqrt{2}-\mu).\tag{1}$$

鉛直方向の釣り合い：

$$\frac{R}{\sqrt{2}} - \frac{\mu P}{\sqrt{2}} - \mu P - Mg = 0. \tag{2}$$

(1) から得られる $R/\sqrt{2} = P - \mu P/\sqrt{2}$ を (2) に代入すると、

$$P - \frac{\mu P}{\sqrt{2}} - \frac{\mu P}{\sqrt{2}} - \mu P = Mg$$
$$P(1 - \mu - \sqrt{2}\,\mu) = Mg,$$

ここで $2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$ を用いた。したがって

$$P = \frac{Mg}{1 - \mu(1+\sqrt{2})},$$

となり、示すべき式が得られた。

μ と ν に関する条件

μ について。 P は押す力の大きさであり、$Mg > 0$ なので、$1 - \mu(1+\sqrt{2}) > 0$ が必要である。すなわち

$$\mu < \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} - 1.$$

$\mu \geq \sqrt{2} - 1$ ならば、どれほど大きく押しても円柱を斜面に転がり上がらせることはできない。面での下向きの摩擦の増加が、P とともに少なくとも持ち上げる力と同じ速さで大きくなり、円柱は動かなくなってしまうのである。

ν について。 円柱は斜面上で滑らないので、$F \leq \nu R$ である。$F = \mu P$ と (1) を用い、$\mu < \sqrt{2} - 1 < \sqrt{2}$ より $R > 0$ であることに注意すると、

$$\mu P \leq \nu P(\sqrt{2} - \mu) \quad \Longleftrightarrow \quad \nu \geq \frac{\mu}{\sqrt{2} - \mu},$$

ここで $P(\sqrt{2} - \mu) > 0$ で割った。以上で問題は解けた。

検算

- **なめらかな面、$\mu = 0$：** このとき $P = Mg$ となり、斜面の摩擦は不要である。これは、鉛直な壁と 45° の斜面の間に挟まれた摩擦のない円柱の場合と一致する。斜面の抗力は水平成分と鉛直成分が等しいので、P と Mg を等しく釣り合わせなければならない。
- **数値：** $\mu = 0.2$ のとき、$P \approx 1.934\,Mg$ であり、$\nu \geq 0.165$ が必要である。これらの値を代入し直すと、水平方向の力、鉛直方向の力、O のまわりのモーメントはすべて（丸め誤差の範囲で）釣り合う。M と μ を無作為に選んでも同様である。

- $\mu \to \sqrt{2}-1 \approx 0.414$ のとき $P \to \infty$ となり、これは上で述べた動かなくなる現象と整合する。

よくある間違い

- 斜面で摩擦が限界に達するとしてしまう。「転がる」という条件により、そこでの滑りは除外される。
- 床からの抗力を残したままにする。転がり上がる直前には円柱は浮き上がろうとしているので、床からの抗力はゼロである。
- 面での摩擦の向きを間違える。B は面に対して**上向き**に動くので、円柱に働く摩擦は**下向き**である。これが P が Mg を上回る理由である。

STEP のその先へ

瞬間回転中心（instantaneous centre of rotation）に注目してどの接点が滑るかを判断するという鍵となるステップは、剛体の運動学（rigid-body kinematics）の出発点である。大学 1 年次の講義では、これは一般的な法則 $\mathbf{v}_X = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (X - O)$ や、複数の粗い接点が競合する問題へとつながっていく。$\mu \geq \sqrt{2}-1$ における「動かなくなる」現象、つまりどれだけ強く押しても決してうまくいかない現象は、自己ロック（self-locking）と呼ばれる効果であり、技術者はくさびやクランプで意図的にこれを利用している。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の運動と摩擦をこのような丁寧さで扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。