解答例

STEP I 見本問題、第 10 問

力学 ・ 仕事率と抵抗

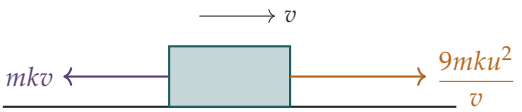
> **STEP I 見本問題、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q10

鍵となる考え方

仕事率（power）は力と速さの積であるから、一定の仕事率 P で動く機関車は P/v の牽引力（driving force）で引っ張る。このときニュートン（Newton）の運動の第 2 法則から、v についての 1 階の微分方程式（differential equation）が得られ、これは変数分離できる。重要なのは加速度の適切な形を選ぶことである。問題が**時間**を問うているなら $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ を、**距離**を問うているなら $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ を用いる。

解答

機関車を水平な線路上の質量 m の質点としてモデル化する。すると重力と垂直抗力（normal reaction）は打ち消し合い、水平方向の力だけを考えればよい。運動の向きを正の向きとする。



最大の速さ

速さ v のとき牽引力は $9mku^2/v$ であるから、ニュートンの第 2 法則より

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{9mku^2}{v} - mkv \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{k\,(9u^2 - v^2)}{v}.$$

$v < 3u$ である間は右辺が正であるから、機関車は加速する。加速が止まるのは牽引力と抵抗がつり合うとき、すなわち $9u^2 = v^2$ のときだけである。よって、とりうる最大

の速さは

$$v_{\max} = 3u.$$

考えてみよう 機関車は $v < 3u$ である間はつねに加速しているのに、なぜ $3u$ に到達しないのだろうか。

$v \to 3u$ のとき加速度は 0 に近づく。変数を分離すると、速さ v_1 から速さ v_2 になるまでの時間は

$$t = \frac{1}{k}\int_{v_1}^{v_2} \frac{v}{9u^2 - v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{9u^2 - v_1^2}{9u^2 - v_2^2}\right),$$

であり、これは $v_2 \to 3u$ のとき無限大に発散する。したがって $3u$ は終端速度（terminal speed）である。機関車はいくらでも $3u$ に近づくが、有限の時間で実際に到達することはない。（同じことであるが、$v = 3u$ はこの微分方程式の平衡点（equilibrium）であり、解の一意性（uniqueness）により、それより下から出発した解がそこに到達することはできない。）

u から $2u$ まで

上の公式に $v_1 = u$、$v_2 = 2u$ を代入すると

$$t = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{9u^2 - u^2}{9u^2 - 4u^2}\right) = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{8u^2}{5u^2}\right) = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{8}{5}\right),$$

となり、示すべき式が得られた。

動力の停止

このとき働く力は 2 つの抵抗 mkv と mkB だけであり、どちらも運動を妨げる向きに働く。求めたいのは距離であるから、加速度を $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ と書く。

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -mk(v + B) \quad\Longrightarrow\quad \frac{v}{v + B}\,\mathrm{d}v = -k\,\mathrm{d}x.$$

$\dfrac{v}{v+B} = 1 - \dfrac{B}{v+B}$ と書き直し、x が 0 から D まで増加する間に v が $2u$ から 0 まで減少するとして積分すると

$$\begin{aligned} kD &= \int_0^{2u}\left(1 - \frac{B}{v + B}\right)\mathrm{d}v \\ &= \Big[v - B\ln(v + B)\Big]_0^{2u} \\ &= 2u - B\ln\left(\frac{2u + B}{B}\right). \end{aligned}$$

よって、動力を止めてから進む距離は

$$D = \frac{1}{k}\left[2u - B\ln\left(1+\frac{2u}{B}\right)\right].$$

今度は機関車は有限の時間で停止する。$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -k(v+B) \le -kB < 0$ であるから、減速度は決して kB を下回らない。一定の抵抗を追加する必要があるのは、まさにこのためである。

検算

- $B \to 0$ のとき $B\ln(1+2u/B) \to 0$ であるから、$D \to 2u/k$ となる。これは抵抗 mkv だけの場合と一致する。その場合は $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = -kv$ より、v は距離に対して割合 k で一次関数的に減少する。
- $y > 0$ のとき $\ln(1+y) < y$ であるから $B\ln(1+2u/B) < 2u$ となり、$D > 0$ である。また、D は B が大きくなるにつれて減少する。これは当然そうあるべきである。
- 数値的には、$k = u = B = 1$ として運動方程式を数値的に刻んで解くと、停止距離は 0.90139 となり、$2 - \ln 3 \approx 0.90139$ と一致する。動力のある段階を $v = 1$ から時間 $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5} \approx 0.2350$ だけ刻んで解くと、最後に $v = 2.0000$ となる。

よくある間違い

- 牽引力を一定として扱ってしまう。仕事率が一定のとき、力は P/v であり、機関車が速くなるにつれて小さくなる。
- 最後の部分で $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ を用いてしまう。これでは停止距離ではなく停止までの時間が求まる。
- 機関車は「いずれは」$3u$ に到達すると主張してしまう。時間の積分は発散するので、到達することはない。

STEP のその先へ

速さ $3u$ は自励系（autonomous）の方程式 $\dot{v} = f(v)$ の安定な平衡点である。解はそこへ指数関数的に近づくが、決して一致しない。性質のよい微分方程式の解どうしは交わることも合流することもできないからである。これは、微分方程式の入門講義で学ぶ解の一意性定理と相直線（phase line）解析の最初の一端である。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）はその両方を扱っている。仕事率や抵抗力についてさらに学ぶには、Kleppner と Kolenkow によ

る *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。