解答例

STEP I 見本問題、第 1 問

純粋数学 • 判別式と部分分数

STEP I 見本問題、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s1-q1

鍵となる考え方

小問 (i) では、各 x を固定すると方程式は y についての 2 次方程式であり、実数 y が存在するのは判別式（discriminant）が非負のときに限る。この条件がそのまま x に対する制約になる。役割を入れ替えると、方程式は x についての 2 次方程式でもあり、そこから y に対する制約が得られる。小問 (ii) は部分分数分解（partial fractions）の標準的な問題である。分数を、二項展開（binomial expansion）がわかっている項に分け、x^n の係数を足し合わせればよい。

解答

小問 (i)

方程式を、係数が x に依存する y の 2 次方程式とみなす：

$$y^2 + 16x\,y + (4x^2 + 24x) = 0.$$

与えられた実数 x に対して、これを満たす実数 y が存在するための必要十分条件は、判別式が非負であることである：

$$\begin{aligned}(16x)^2 - 4(4x^2 + 24x) &= 256x^2 - 16x^2 - 96x \\ &= 240x^2 - 96x = 48x(5x - 2) \geq 0.\end{aligned}$$

積 $x(5x-2)$ が非負となるのは、2 つの因数が同符号である（またはどちらかが 0 である）とき、すなわち $x \leq 0$ または $x \geq \frac{2}{5}$ のときに限る。したがって、任意の実数解は

$$x \leq 0 \quad \text{または} \quad x \geq \tfrac{2}{5},$$

を満たし、示すべきことが示された。

次に、方程式を x の 2 次方程式とみなす：

$$4x^2 + (16y + 24)x + y^2 = 0.$$

実数 x が存在するための必要十分条件は

$$\begin{aligned}(16y + 24)^2 - 16y^2 &= 256y^2 + 768y + 576 - 16y^2 \\ &= 240y^2 + 768y + 576 \\ &= 48(5y^2 + 16y + 12) = 48(5y + 6)(y + 2) \geq 0.\end{aligned}$$

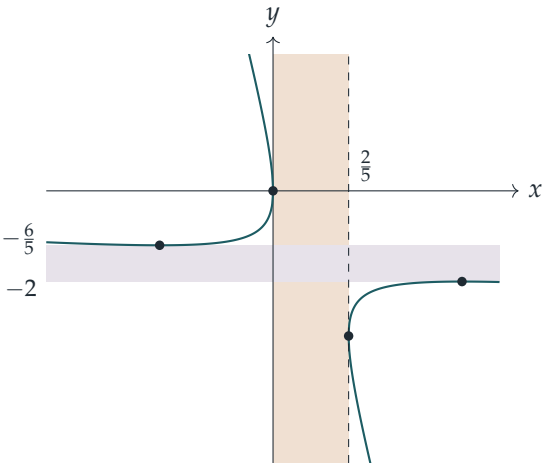
$(5y + 6)(y + 2)$ の根は $y = -2$ と $y = -\frac{6}{5}$ であり、この 2 次式が負になるのはその間だけである。よって

$$y \leq -2 \quad \text{または} \quad y \geq -\tfrac{6}{5}.$$

考えてみよう これらの制約は最良のものだろうか。それとも、実際の範囲はもっと狭いのだろうか。

これらは正確である。判別式による議論は「必要十分条件」であり、$x \leq 0$ または $x \geq \frac{2}{5}$ を満たすすべての x に対して少なくとも 1 つの実数 y が存在し、y についても同様である。境界の値も重根によって実際にとられる。x の範囲の端については $(x, y) = (0, 0)$ と $(\frac{2}{5}, -\frac{16}{5})$、$y$ の範囲の端については $(1, -2)$ と $(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5})$ である。いずれも元の方程式を満たすことを確かめられる。

幾何学的には、この曲線は双曲線（hyperbola）であり（$16^2 > 4 \cdot 4 \cdot 1$ だから）、除外される 2 つの帯状の領域は、その 2 つの枝の間の隙間である。



小問 (ii)

次のようにおく：

$$\frac{9}{(2-x)^2(1+x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{2-x} + \frac{C}{(2-x)^2},$$

すると $9 = A(2-x)^2 + B(2-x)(1+x) + C(1+x)$ である。$x=-1$ とおくと $9=9A$ より $A=1$、$x=2$ とおくと $9=3C$ より $C=3$、$x=0$ とおくと $9=4A+2B+C=7+2B$ より $B=1$ である。したがって

$$\frac{9}{(2-x)^2(1+x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} + \frac{3}{(2-x)^2}.$$

次に各項を展開する。二項級数が $\frac{x}{2}$ のべきになるように、因数 2 をくくり出す：

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n, \qquad |x|<1,$$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1} = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{2^{n+1}}, \qquad |x|<2,$$

$$\frac{3}{(2-x)^2} = \frac{3}{4}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2} = \frac{3}{4}\sum_{n\geq 0}(n+1)\frac{x^n}{2^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{3(n+1)}{2^{n+2}}x^n, \qquad |x|<2,$$

ここで $|u|<1$ に対する $(1-u)^{-2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)u^n$ を用いた。これらを足すと、x^n の係数は

$$(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{3(n+1)}{2^{n+2}} = (-1)^n + \frac{2+3n+3}{2^{n+2}} = (-1)^n + \frac{3n+5}{2^{n+2}}.$$

3 つの級数がすべて収束（converge）するのは、ちょうど $|x|<1$ のときである（1 つ目は $|x|<1$ を必要とし、残りは $|x|<2$ でよい）。$1\leq|x|<2$ では後の 2 つは収束するが 1 つ目は収束しないので、それらの和も収束しえない。したがって、この展開が有効なのは

$$-1<x<1.$$

検算

小問 (i) では、点 $(1,-2)$ を代入すると $4-32+4+24=0$、$(-\frac{3}{5},-\frac{6}{5})$ を代入すると $\frac{36}{25}+\frac{288}{25}+\frac{36}{25}-\frac{360}{25}=0$ となり、y の範囲の両端が実際にとられることが確かめられる。小問 (ii) では、$n=0$ のとき $1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$ であり、これは $x=0$ における $\frac{9}{4\cdot 1}$ と一致する。また $n=1$ のとき $-1+\frac{8}{8}=0$ であるが、分母 $(2-x)^2(1+x)=4-3x^2+x^3$ に x の項がないことから、これは正しい。数値的にも、$x=0.9$ で級数を足し合わせると $3.914745\ldots$ となり、$9/(1.1^2\times 1.9)$ と一致する。

よくある間違い

- 不等号の向きを逆にして、$-2 \leq y \leq -\frac{6}{5}$ と答えてしまう。判別式が負になるのは根の**間**であるから、その区間こそが除外される区間である（実際、$(0,0)$ は曲線上にあり、$y = 0$ はその区間の外にある）。
- 因数 $\frac{1}{2}$（2 乗の項では $\frac{1}{4}$）をくくり出すのを忘れ、$(2-x)^{-1}$ を $(1-x)^{-1}$ であるかのように展開してしまう。
- 有効範囲を $|x| < 2$ と答えてしまう。展開が有効なのはすべての項が収束する範囲だけなので、$|x| < 1$ である。

STEP のその先へ

小問 (i) の曲線は 2 次曲線（conic）であり、それが楕円・放物線・双曲線のいずれになるかは、2 次の項 $ax^2 + bxy + cy^2$ に対する $b^2 - 4ac$ の符号で決まる。大学では、これを 2 次形式（quadratic form）の対称行列とその固有値（eigenvalue）を通して理解する。小問 (ii) は収束半径（radius of convergence）の考え方に触れている。展開は、関数が発散する最も近い点、ここでは $x = -1$ まで有効である。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は 2 次形式を扱っており、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の理解）はべき級数とその収束を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。