解答例

STEP III 1999、第 9 問

力学 ・ ニュートンの球殻定理

> **STEP III 1999、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q9

この問題は、*Beyond STEP* の第 10.7 節「**球殻の内部の重力**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/shell-theorem.html

鍵となる考え方

広がりをもつ物体による重力（gravity）は、その小さな部分のそれぞれが及ぼす引力のベクトル和である。円環（ring）の場合は、対称性がほとんどの仕事をしてくれる。円環の反対側にある部分どうしは互いの横向きの引力を打ち消し合い、しかもどの部分も質点から同じ距離にあるので、単純な成分が一つだけ残る。球殻（shell）の場合は、質点を通る直線を軸とする円環に球殻を薄く切り分け、それぞれの切片に円環の結果を用い、切片を積分によって足し合わせる。うまく選んだ置換（substitution）によって、その積分は 0 に帰着する。

解答

円環

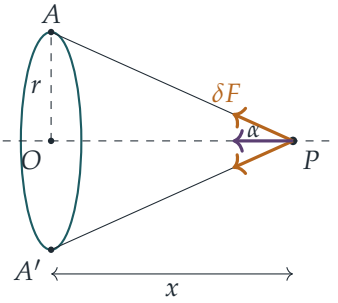
円環を質量 m の一様で細い円とし、質点を中心 O から距離 x の軸上の点 P にある単位質量の点とする。P、O と円環上の点がつくる直角三角形に三平方の定理（Pythagoras' theorem）を用いると、円環上のすべての点は P から同じ距離

$$d = \sqrt{x^2 + r^2}$$

にある。

向き。円環上の点 A にある小さな要素と、直径の反対側の点 A' にある等しい要素を

組にする。これらは P から同じ距離 d にあるので、PA 方向と PA' 方向に同じ大きさで引く。この二直線は軸に関して互いに対称であるから、軸に垂直な成分は打ち消し合い、軸方向の成分は足し合わされて、どちらも P から O に向かう。円環全体はこのような組からなるので、質点にはたらく合力は軸方向で、円環の中心に向かう。



大きさ。質量 δm の要素は PA 方向に大きさ $G\,\delta m/d^2$ の力で引く。PA と軸 PO のなす角を α とすると $\cos\alpha = x/d$ であるから、O に向かう成分は

$$\frac{G\,\delta m}{d^2}\cdot\frac{x}{d} = \frac{Gx\,\delta m}{(x^2+r^2)^{3/2}}.$$

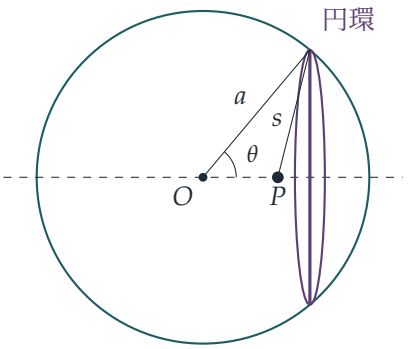
である。δm にかかる係数はどの要素についても同じなので、円環全体で和をとると δm が m に置き換わるだけである：

$$F = \frac{Gmx}{(x^2+r^2)^{3/2}},$$

これは中心に向かう向きであり、示すべきことが示された。P が円環の反対側にある場合は、x を $|x|$ に置き換えればこれが成り立つ。次の部分では x を符号付きの距離として用いるが、そのとき符号付きの x による公式は力の符号付き成分を正しく与える。

球殻

球殻の中心を O、半径を a、質量を M とすると、その面密度（surface density）は $M/(4\pi a^2)$ である。質点を $OP = b < a$ となる点 P に置く。$b = 0$ ならば、O から見てどの方向も同等で、球殻上の反対側の点どうしの引力が打ち消し合うので、力は 0 である。以下では $0 < b < a$ とし、直線 OP を軸として、その上の距離を O から P の向きに測る。



OP に垂直な平面で球殻を薄い円環に切り分ける。極角 θ と $\theta+\delta\theta$（O において OP の向きから測る）の間にある円環は、半径 $a\sin\theta$、中心が軸上の位置 $a\cos\theta$、幅 $a\,\delta\theta$ である。その質量は

$$\delta M = \frac{M}{4\pi a^2}\cdot 2\pi a\sin\theta\cdot a\,\delta\theta = \tfrac{1}{2}M\sin\theta\,\delta\theta.$$

である。この円環の中心は P から符号付き距離 $a\cos\theta-b$ の位置にある。円環の結果より、この円環が P を引く力は軸方向であり、その正の向き（O から遠ざかり P を通る向き）の成分は

$$\frac{G\,\delta M\,(a\cos\theta-b)}{\left((a\cos\theta-b)^2+a^2\sin^2\theta\right)^{3/2}} = \frac{G\,\delta M\,(a\cos\theta-b)}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{3/2}}.$$

である。この符号の取り方はどちらの場合にも正しい。$a\cos\theta>b$ のとき円環は P の先にあり正の向きに引き、$a\cos\theta<b$ のときは逆向きに引く。どの円環も同じ軸に沿って引くので、合力は OP 方向であり、その成分は

$$F = \frac{GM}{2}\int_0^{\pi}\frac{(a\cos\theta-b)\sin\theta}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta.$$

である。

? **考えてみよう** 分母を扱いやすくするには、どのような置換をすればよいか。

量 $a^2+b^2-2ab\cos\theta$ は、余弦定理（cosine rule）により、P から円環までの距離 s（図で s と記した線分）の 2 乗である。そこで

$$s^2 = a^2+b^2-2ab\cos\theta, \qquad 2s\,\mathrm{d}s = 2ab\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

と置換する。θ が 0 から π まで動くとき、s は $a-b$ から $a+b$ まで増加する（$b<a$ なので正である）。また

$$a\cos\theta-b = \frac{a^2+b^2-s^2}{2b}-b = \frac{a^2-b^2-s^2}{2b}.$$

である。$\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \dfrac{s\,\mathrm{d}s}{ab}$ を用いると

$$F = \frac{GM}{2}\int_{a-b}^{a+b} \frac{a^2-b^2-s^2}{2b}\cdot\frac{1}{s^3}\cdot\frac{s}{ab}\,\mathrm{d}s = \frac{GM}{4ab^2}\int_{a-b}^{a+b}\left(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\right)\mathrm{d}s$$
$$= \frac{GM}{4ab^2}\left[-\frac{a^2-b^2}{s}-s\right]_{a-b}^{a+b}.$$

となる。$s = a+b$ において括弧内は $-(a-b)-(a+b) = -2a$、$s = a-b$ において $-(a+b)-(a-b) = -2a$ である。これらは等しいので

$$F = \frac{GM}{4ab^2}\big(-2a-(-2a)\big) = 0.$$

となる。力は OP 方向で、その OP 方向の成分が 0 であるから、質点は球殻による重力を受けない。以上で示された。

検算

- 円環：$x = 0$ では力は 0 であり（質点は中心にあり、引力はつり合う）、$x \gg r$ では Gm/x^2 に近づく。これは全質量が O に集まっている場合と同じである。
- 球殻の外側：代わりに $b > a$ とすると、下端は $s = b-a$ となり、そこで括弧内は $(a+b)-(b-a) = 2a$ である。すると $F = \frac{GM}{4ab^2}(-4a) = -GM/b^2$ となり、全質量が中心にあるかのように O に向かう引力となる。これはニュートン（Newton）のもう一つの殻定理であり、積分が正しいことを示すよい兆候である。
- 数値的には、円環上の 2000 個の質点について和をとると、公式が小数点以下 10 桁まで再現された。θ についての積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、いくつかの無作為な $b < a$ に対して約 10^{-15} となり、$a = 2$、$b = 1.3$、$GM = 1$ として 2×10^5 個の無作為な点からなるモンテカルロ法（Monte Carlo method）による球殻では、典型的な尺度 $GM/a^2 = 0.25$ に対して 10^{-3} 未満の力となった。

よくある間違い

- 円環の質量要素を $M\,\delta\theta/\pi$ とすること。$\theta = \pi/2$ 付近の円環ほど大きいので、質量は $\delta\theta$ ではなく $\sin\theta\,\delta\theta$ に比例する。
- 円環の公式で $|a\cos\theta - b|$ を用いること。P の両側にある円環は逆向きに引き合い、その打ち消し合いこそが要点である。
- s の積分範囲を誤ること。P は内部にあるので、$\theta = 0$ での距離は $b-a$ ではなく $a-b$ である。

STEP のその先へ

これはニュートンの殻定理（shell theorem）であり、重力に関するガウス（Gauss）の法則（Gauss's law）を使ったより鮮やかな証明がある。任意の閉曲面を通る重力場の流束（flux）は内部の質量に比例するので、対称性により、中空の球殻の内部では場が 0 でなければならない。同じ数学からポテンシャル（potential）も得られ、球殻の内部でポテンシャルが一定であるという事実は、大学 1 年のベクトル解析（vector calculus）で学ぶ調和関数（harmonic function）の初期の例である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、殻定理と重力ポテンシャルを丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。