解答例

STEP III 1999、第 8 問

純粋数学 • 区分的な微分方程式

STEP III 1999、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s3-q8

鍵となる考え方

各区間において、この方程式は振動数が一定の単振動（simple harmonic motion）を表すので、その区間での一般解（general solution）は $\cos nx$ と $\sin nx$ の一次結合である。必要な作業は解をつなぎ合わせることだけである。連続性の条件によって、各区間における y と y' の初期値（starting values）は前の区間の終点での値から定まる。区間の長さはすべて 2π であるから、初期値は毎回同じになり、数学的帰納法（induction）で証明できる規則性が現れる。

解答

小問 (i)

$0 < x < 2\pi$ では $n = 1$ であるから $y'' + y = 0$ であり、その一般解は

$$y = A\cos x + B\sin x.$$

である。y と y' は $x = 0$ で連続であるから、条件 $y(0) = 0$ と $y'(0) = 1$ はこの解に適用できる。すなわち $y(0) = A = 0$、$y'(0) = B = 1$ である。したがって

$$y = \sin x \qquad (0 \le x \le 2\pi).$$

右端では $y(2\pi) = \sin 2\pi = 0$、$y'(2\pi) = \cos 2\pi = 1$ である。

小問 (ii)

$2\pi < x < 4\pi$ では $n = 2$ であるから $y'' + 4y = 0$ であり、

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

である。$x = 2\pi$ における y と y' の連続性により、この解はそこで $y = 0$、$y' = 1$ でなければならない。これは小問 (i) の終点で求めた値である。$\cos 4\pi = 1$、$\sin 4\pi = 0$ であるから

$$y(2\pi) = A = 0, \qquad y'(2\pi) = 2B\cos 4\pi = 2B = 1,$$

となり、$B = \frac{1}{2}$ である。よって $2\pi \le x \le 4\pi$ で $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ となり、示すべきことが得られた。

ここでも $y(4\pi) = \frac{1}{2}\sin 8\pi = 0$、$y'(4\pi) = \cos 8\pi = 1$ となることに注意しよう。次の区間はまったく同じ値から始まるのである。このことから次の主張が予想される。

主張. すべての正の整数 n に対して

$$y = \frac{1}{n}\sin nx \qquad \text{ただし} 2(n-1)\pi \le x \le 2n\pi.$$

数学的帰納法による証明. $n = 1$ の場合は小問 (i) である。$n = k$ のとき主張が成り立つと仮定する。$x = 2k\pi$ において、直前の区間の解から

$$y = \frac{1}{k}\sin(2k^2\pi) = 0, \qquad y' = \cos(2k^2\pi) = 1,$$

が得られる。$2k^2\pi$ は 2π の整数倍だからである。$2k\pi < x < 2(k+1)\pi$ では方程式は $y'' + (k+1)^2 y = 0$ であるから

$$y = A\cos(k+1)x + B\sin(k+1)x.$$

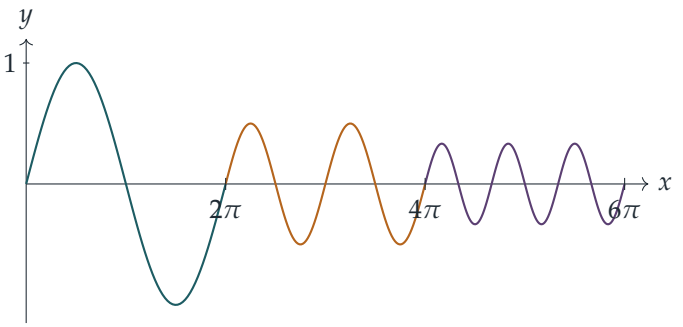
考えてみよう 左端 $x = 2k\pi$ において、$\cos(k+1)x$ と $\sin(k+1)x$ の値はいくらか。

そこでは $(k+1)x = 2k(k+1)\pi$ であり、これも 2π の整数倍であるから、余弦は 1、正弦は 0 である。したがって $x = 2k\pi$ における y と y' の連続性から

$$A = 0, \qquad (k+1)B = 1,$$

が得られ、$2k\pi \le x \le 2(k+1)\pi$ で $y = \dfrac{1}{k+1}\sin(k+1)x$ となる。これは $n = k+1$ の場合の主張であり、数学的帰納法により、すべての $n \ge 1$ について主張が成り立つ。□

よって、$2(n-1)\pi \le x \le 2n\pi$ のとき $y(x) = \dfrac{1}{n}\sin nx$ である。（各つなぎ目 $x = 2n\pi$ では、隣り合う二つの式がどちらも $y = 0$ を与えるので、曖昧さは生じない。）



小問 (iii)

小問 (ii) の結果を用いると、第 n 区間において

$$\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} y^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} (1-\cos 2nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{n^2},$$

となる。$\sin 2nx$ は積分の上端・下端のどちらでも 0 になる（各端は π の倍数であり、$2n$ は整数である）ので、余弦の項の積分は 0 になるからである。

最初の N 個の区間を足し合わせると

$$\int_0^{2N\pi} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}.$$

無限区間の積分（広義積分、improper integral）は、$X\to\infty$ のときの $\int_0^X y^2\,\mathrm{d}x$ の極限である。$y^2\geq 0$ であるから、これは X の増加関数である。また $2(N-1)\pi \leq X \leq 2N\pi$ のとき、その値は $2(N-1)\pi$ での値と $2N\pi$ での値の間にある。級数は収束（converges）するので、$N\to\infty$ のとき、これら二つの値はどちらも $\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ に近づく。したがって

$$\int_0^{\infty} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

となり、示すべきことが得られた。

検算

- 各部分 $\frac{1}{n}\sin nx$ は $y''=-n^2y$ を満たし、$y=0$、$y'=1$ から始まって $y=0$、$y'=1$ で終わる。よって各部分は値と傾きの両方において滑らかにつながる。
- 微分方程式を数値的に（4 次のルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で）最初の六つの区間にわたって解くと、10^{-10} 以内の誤差で $\frac{1}{n}\sin nx$ が再現され、12π までの y^2 の積分は 4.685336 となり、$\pi(1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{36})$ と一致する。

- オイラー（Euler）の結果 $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ を用いると、積分の値は $\pi^3/6 \approx 5.168$ となる。

よくある間違い

- 初期条件（initial conditions）を、各区間の左端 $x = 2(n-1)\pi$ ではなく、すべての区間で $x = 0$ において適用してしまう。この問題でたまたま正しい答えが得られるのは、始点が 2π の倍数だからにすぎず、そのことは明記しなければならない。
- $y' = nB\cos nx$ であることを忘れる。この因子 n こそが振幅 $\frac{1}{n}$ を生み出すのである。
- 極限が存在する理由を述べずに、積分を無限和として書いてしまう。y^2 が非負であることを使えば、これは容易に示せる。

STEP のその先へ

これは区分的に定数な係数（piecewise-constant coefficients）をもつ微分方程式の簡単な例であり、決まった時刻に硬さが切り替わるばねのモデルとなる種類の方程式である。各切り替えの時点で y'' は不連続に跳ぶが、解そのものは連続かつ微分可能なままである。最終的な答え $\pi^3/6$ は、微分方程式をバーゼル問題（Basel problem）の和 $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ に結びつけている。この和は、大学のフーリエ級数（Fourier series）の講義で、パーセバルの定理（Parseval's theorem）を用いて初めて証明されることが多い。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は、2 階線形微分方程式とフーリエ級数の両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。