解答例

STEP III 1999、第 7 問

純粋数学 ・ 群と同型

> **STEP III 1999、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q7

鍵となる考え方

式 $x+y+axy$ はほとんど積の形をしている。a を掛けて 1 を加えると

$$1+a(x*y) = 1+ax+ay+a^2xy = (1+ax)(1+ay),$$

となる。したがって変数変換（change of variable）$X = 1+ax$ のもとでは、演算（operation）$*$ は姿を変えた通常の乗法にすぎない。群（group）のあらゆる性質は乗法の対応する性質から導かれ、取り除かなければならない唯一の数は $X=0$ に対応する数である。

解答

以下を通じて $\phi(x) = 1+ax$ とおく。$a \neq 0$ であるから、ϕ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への全単射（bijection）であり、したがって二つの実数 u, v が等しいのは $\phi(u) = \phi(v)$ のときであり、かつそのときに限る。上の恒等式は次のように書ける。

$$\phi(x*y) = \phi(x)\,\phi(y) \qquad \text{任意の実数} x, y. \tag{†}$$

結合法則

両辺それぞれに (†) を 2 回用いると

$$\phi((x*y)*z) = \phi(x*y)\,\phi(z) = \phi(x)\,\phi(y)\,\phi(z),$$
$$\phi(x*(y*z)) = \phi(x)\,\phi(y*z) = \phi(x)\,\phi(y)\,\phi(z).$$

実数の乗法は結合的であるからこれらは等しく、ϕ は単射（one-to-one）であるから $(x*y)*z = x*(y*z)$ が成り立つ。よって $*$ は結合法則（associativity）を満たす。

（直接確かめたい場合は、$(x*y)*z$ と $x*(y*z)$ がともに対称式 $x+y+z+a(xy+yz+zx)+a^2xyz$ に展開されることを見ればよい。）

群

考えてみよう どの数を取り除かなければならないか。また、なぜ $\mathbb{R}$ 全体のままではいけないのか。

ϕ のもとで、数 $x=-\frac{1}{a}$ は $\phi(x)=0$ に対応し、0 には乗法の逆数がない。具体的には、任意の実数 y に対して

$$\left(-\tfrac{1}{a}\right)*y=-\tfrac{1}{a}+y-y=-\tfrac{1}{a},$$

となるので、$-\frac{1}{a}$ はすべてを吸収してしまい、何と演算しても単位元になることはない。そこで

$$G=\mathbb{R}\setminus\left\{-\tfrac{1}{a}\right\},$$

とする。これはちょうど $\phi(x)\neq 0$ を満たす x 全体の集合である。四つの公理（axioms）を確かめる。

演算について閉じていること（*closure*）。 $x,y\in G$ ならば $\phi(x)\neq 0$ かつ $\phi(y)\neq 0$ であるから、(†) より $\phi(x*y)=\phi(x)\phi(y)\neq 0$ である。ゆえに $x*y\neq -\frac{1}{a}$ であり、$x*y$ は明らかに実数であるから $x*y\in G$ である。

結合法則。これはすべての実数について上で示したので、特に G の元についても成り立つ。

単位元（*identity*）。すべての x について $x*0=x+0+0=x$ かつ $0*x=x$ であり、$\phi(0)=1\neq 0$ より $0\in G$ である。よって 0 が単位元である。（これは乗法の単位元である $\phi(0)=1$ と対応している。）

逆元（*inverses*）。 $x\in G$ が与えられたとき、$x*y=0$、すなわち $x+y(1+ax)=0$ を満たす y を求めたい。$1+ax\neq 0$ であるから割り算ができて

$$x^{-1}=\frac{-x}{1+ax}.$$

を得る。これは G に属する。なぜなら

$$\phi\left(\frac{-x}{1+ax}\right)=1-\frac{ax}{1+ax}=\frac{1}{1+ax}\neq 0,$$

だからである。また、$*$ は可換である（$x*y=y*x$ は式から明らか）ので、$x^{-1}*x=0$ も成り立つ。

四つの公理がすべて成り立つので、$(G,*)$ は群（実際にはアーベル群（abelian group））であり、除外される数は $-\frac{1}{a}$ である。

位数 2 の部分群

0 でない実数のなす乗法群は部分群（subgroup）$\{1,-1\}$ をもつ。これを ϕ で引き戻す。$\phi(x)=1$ からは $x=0$ が、$\phi(x)=-1$ からは $x=-\frac{2}{a}$ が得られる。そこで

$$H=\left\{0,\,-\tfrac{2}{a}\right\}.$$

を考える。これらは G の異なる二つの元である（$a\neq 0$ より $-\frac{2}{a}\neq 0$ かつ $-\frac{2}{a}\neq -\frac{1}{a}$）。直接計算すると

$$\left(-\tfrac{2}{a}\right)*\left(-\tfrac{2}{a}\right)=-\tfrac{4}{a}+a\cdot\tfrac{4}{a^2}=0,$$

であり、$0*0=0$、$0*\left(-\frac{2}{a}\right)=-\frac{2}{a}$ である。よって H は演算について閉じており、単位元を含み、各元は自分自身の逆元である。ゆえに H はちょうど 2 個の元をもつ $(G,*)$ の部分群である。

実はこれが唯一のものである。位数（order）2 の群は $h*h=e$ かつ $h\neq e$ を満たす $\{e,h\}$ という形であり、$h*h=0$ は $h(2+ah)=0$ を意味するので、$h=-\frac{2}{a}$ となる。

検算

$a=1$ とする。このとき $x*y=x+y+xy=(1+x)(1+y)-1$ であり、除外される数は -1、位数 2 の部分群は $\{0,-2\}$ である。実際 $(-2)*(-2)=-4+4=0$ となる。また $2*3=11$ であり、(†) の予言どおり $(1+2)(1+3)=12=1+11$ である。コンピュータを用いて、a,x,y,z を約 5000 通り無作為に選び、厳密な有理数演算により、恒等式 (†)、結合法則、G における閉性、単位元 0、逆元の公式、および $\{0,-\frac{2}{a}\}$ の閉性を確認した。

よくある間違い

- 逆元 $\frac{-x}{1+ax}$ 自身が G に属すること、あるいは $x*y$ が除外される数に決して等しくならないことの確認を忘れる。ちょうど 1 点だけを取り除くことを正当化するのは、閉性の公理である。
- 部分群として $\{0\}$ や $\{0,-\frac{1}{a}\}$ を答えてしまう。前者は元が 1 個しかなく、$-\frac{1}{a}$ はそもそも G に属さない。

STEP のその先へ

写像 $\phi(x)=1+ax$ は $(G,*)$ から群 $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\times)$ への**同型写像**（isomorphism）である。すなわち、一方の演算をもう一方の演算に移す全単射である。同型写像を見つけ

てしまえば、構造に関するあらゆる事実がそのまま移ってくる。$\times$ において位数 2 の元が -1 だけであるのと同様に、$(G, *)$ が位数 2 の元をちょうど一つもつのはこのためである。同型写像、そして二つの群が見かけは違っても「同じ」でありうるという考え方は、抽象代数学（abstract algebra）の最初の講義の中心をなす。これについて読むには Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい出発点である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。