解答例

STEP III 1999、第 6 問

純粋数学 • 媒介変数表示された曲線と面積

> **STEP III 1999、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q6

鍵となる考え方

この方程式は $(x^{1/n})^2 + (y^{1/n})^2 = (a^{1/n})^2$ ということであり、姿を変えた円である。そこで、円の場合とまったく同じように $x^{1/n} = a^{1/n}\cos t$、$y^{1/n} = a^{1/n}\sin t$ とおき、それから n 乗する。n が奇数（odd）であるおかげで負の数の実数の n 乗根がとれるので、この曲線は四つの象限（quadrant）すべてにわたって存在する。

解答

パラメータ表示

n は奇数なので、どの実数 x もちょうど一つの実数の n 乗根 $x^{1/n}$ をもち、その符号は x と同じである。また $x^{2/n}$ は $(x^{1/n})^2$ を意味する。$X = x^{1/n}$、$Y = y^{1/n}$、$R = a^{1/n} > 0$ とおくと、方程式 $(*)$ は

$$X^2 + Y^2 = R^2,$$

となる。これは半径 R の円であり、$X = R\cos t$、$Y = R\sin t$ とパラメータ表示（parametrisation）できる。n 乗する操作は（n が奇数なので）$\mathbb{R}$ の全単射（bijection）であり、これにより

$$\boxed{x = a\cos^n t, \qquad y = a\sin^n t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.}$$

を得る。円上のすべての点 (X, Y) がこのように表されるので、曲線上のすべての点もこのように表される。

考えてみよう なぜこれが単に曲線を「何らかの」向きにたどるのではなく、反時計回りにたどるといえるのか。

写像 $(X,Y)\mapsto(X^n,Y^n)$ は各座標の符号を保つので、各象限をそれ自身に移す。t が 0 から 2π まで動くとき、点 $(R\cos t, R\sin t)$ は円を反時計回り（anticlockwise）に一周し、x 軸の正の部分、第 1 象限、y 軸の正の部分、第 2 象限、……をこの順に通る。その像 (x,y) も同じ軸と象限を同じ順に通るので、やはり原点のまわりを反時計回りに一周する。（たとえば第 1 象限内では、$x=a\cos^n t$ は a から 0 へ減少し、$y=a\sin^n t$ は 0 から a へ増加する。）$n=1$ のときは、これはおなじみの円 $x=a\cos t$、$y=a\sin t$ にほかならない。

$n=3$ のときの概形

このとき $x=a\cos^3 t$、$y=a\sin^3 t$ であり、曲線は $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ である。

対称性（*symmetry*）。方程式は $x\mapsto -x$、$y\mapsto -y$、および x と y の入れ替えによって変わらない。よって曲線は両座標軸と直線 $y=\pm x$ に関して対称であり、第 1 象限 $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ だけを調べればよい。

切片（*intercept*）。$t=0$ では点 $(a,0)$ に、$t=\frac{\pi}{2}$ では点 $(0,a)$ にある。対称性より、曲線が座標軸と交わるのは $(\pm a,0)$ と $(0,\pm a)$ のみである。直線 $y=x$ 上（$t=\frac{\pi}{4}$）では点 $(\frac{a}{2\sqrt{2}},\frac{a}{2\sqrt{2}})$ にあり、各軸方向にわずか約 $0.35a$ しか進んでいない。

傾き（*gradient*）。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-3a\cos^2 t\sin t,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3a\sin^2 t\cos t,$$

であるから、$0<t<\frac{\pi}{2}$ において

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t.$$

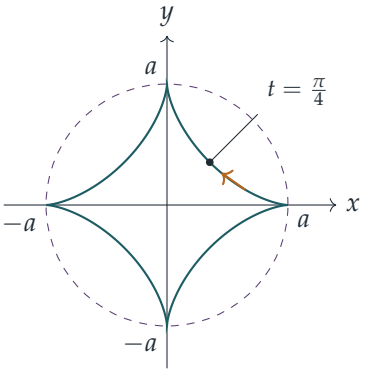
これは $t\to 0$ のとき 0 であり、$t\to\frac{\pi}{2}$ のとき $-\infty$ に発散する。よって曲線は $(a,0)$ では x 軸に接して（tangent）到達し、$(0,a)$ では y 軸に接して到達する。$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ と $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ はともに $t=0$ と $t=\frac{\pi}{2}$ で 0 になる。第 1 象限の弧と、それを折り返した第 4 象限の弧は $(a,0)$ で出会い、そこで両方とも x 軸に接しているので、二つの弧は鋭くとがった点で合わさる。この曲線は四点 $(\pm a,0)$、$(0,\pm a)$ に**尖点**（cusp）をもつ。

凹凸（*concavity*）。$-\tan t$ を x で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}>0\quad\text{ただし}0<t<\tfrac{\pi}{2}.$$

よって第 1 象限の弧は下に凸（convex）である。つまり円のように外側へふくらむのではなく、原点のほうへ内側に曲がっている。この弧は弦（chord）$x+y=a$ の下側にある。実際 $\cos^3 t+\sin^3 t\le\cos^2 t+\sin^2 t=1$ であり、等号は尖点でのみ成り立つ。

以上をまとめると、四つの角をもつ星形（**アステロイド**（astroid））が得られる。下図では比較のため、半径 a の円を破線で示している。



$n = 3$ のときの面積

上で求めた導関数を用いると

$$\begin{aligned} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t\sin t \\ &= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t = \tfrac{3}{4}a^2\sin^2 2t. \end{aligned}$$

$\sin^2 2t = \frac{1}{2}(1-\cos 4t)$ であり、$\cos 4t$ の $[0, 2\pi]$ 上の積分は 0 であるから

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,\mathrm{d}t = \pi.$$

したがって

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3a^2}{4}\cdot\pi = \boxed{\frac{3\pi a^2}{8}}.$$

曲線が反時計回りにたどられるので、この公式は正の面積を与える。最初の小問で向きが重要だったのはこのためである。

検算

- アステロイドは面積 $2a^2$ のひし形 $|x| + |y| \le a$ の内部にあるので、答えは $2a^2$ より小さくなければならない。実際 $\frac{3\pi}{8}a^2 \approx 1.178a^2$ である。
- 公式を使わない検算として、$a = 1$ として $4\int_0^a \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}\mathrm{d}x$ を数値計算すると 1.178097… となり、$3\pi/8 = 1.1780972\ldots$ と一致する。
- $n = 1$ の場合に同じ方法を用いると $x\dot{y} - y\dot{x} = a^2$、$A = \pi a^2$ となり、当然ながら円の面積が得られる。

よくある間違い

- 負の x がなぜ許されるのかを説明せずに $x = a\cos^n t$ と書いてしまう。n が奇数であることこそが、$x < 0$ に対して $x^{2/n}$ に意味を与え（そしてパラメータ表示が曲線全体を表すことを保証し）ているのである。
- 曲線を、つぶれた円のように外側へふくらんだ形に描いてしまう。第 2 次導関数から、曲線は内側へ曲がり、座標軸上に鋭い尖点をもつことがわかる。
- $[0, \frac{\pi}{2}]$ だけで積分して 4 倍し忘れる、あるいは $-y\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ で符号を誤る（最終的に両方の項は正になる）。

STEP のその先へ

この面積公式は**グリーンの定理**（Green's theorem）の特別な場合である。グリーンの定理は、領域上の積分をその境界に沿った積分に変換するものである。これは、境界をなぞることで面積を測る機械式の器具であるプラニメータ（planimeter）の原理でもある。また、$|x|^p + |y|^p = 1$ のような曲線は、解析学（analysis）や線形代数（linear algebra）で出会う ℓ^p ノルム（norm）の「単位円」を与える。アステロイドは $p = \frac{2}{3}$ の場合であり、これは凸ではないのでノルムを与えない。さらにアステロイドは、半径が 4 倍の円の内側を転がる円の上の一点が描く軌跡としても現れる。この種の問題をもっと解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。