解答例

STEP III 1999、第 5 問

純粋数学 ・ フィボナッチ数の恒等式と帰納法

STEP III 1999、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s3-q5

鍵となる考え方

これはフィボナッチ数列（Fibonacci sequence）を $u_n = F_{n+1}$ となるようにずらしたものである。最初の恒等式（identity）については、u_{n+2} と u_{n-1} をともに中央の組 u_{n+1} と u_n で表す。すると交差項が打ち消し合う。倍数公式（doubling formulae）については、二つの主張を**同時に**帰納法（induction）で証明する。漸化式（recurrence）を通じて、それぞれが互いを支えているからである。最初の恒等式は、奇数の場合を仕上げるのにちょうど必要な道具となる。

解答

最初の恒等式

$n \geq 1$ を固定する。このとき $u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}$ はすべて定義されている。漸化式より

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \qquad \text{かつ} \qquad u_{n-1} = u_{n+1} - u_n,$$

が成り立つ。後者は $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ から得られる。両辺を 2 乗して加えると

$$\begin{aligned} u_{n+2}^2 + u_{n-1}^2 &= (u_{n+1}^2 + 2u_{n+1}u_n + u_n^2) + (u_{n+1}^2 - 2u_{n+1}u_n + u_n^2) \\ &= 2(u_{n+1}^2 + u_n^2), \end{aligned}$$

となり、これが求める恒等式である。

倍数公式

$P(n)$ を、

$$u_{2n} = u_n^2 + u_{n-1}^2 \qquad \text{かつ} \qquad u_{2n+1} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2.$$

がともに成り立つという主張とする。最初のいくつかの項は $u_0, u_1, \cdots = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ である。

基底段階（base case）。$n = 1$ のとき、$u_2 = 2 = 1^2 + 1^2 = u_1^2 + u_0^2$ であり、$u_3 = 3 = 2^2 - 1^2 = u_2^2 - u_0^2$ である。よって $P(1)$ は成り立つ。

> **考えてみよう** なぜ二つの公式を一つずつではなく、同時に証明するのだろうか。

漸化式から u_{2n+2} を得るには u_{2n+1} と u_{2n} が必要なので、$n+1$ における偶数項の公式には、n における**両方の**公式が必要となる。さらに $n+1$ における奇数項の公式には、$n+1$ における偶数項の公式も必要となる。どちらの主張も、単独では先へ進めることができないのである。

帰納段階（inductive step）。ある $n \geq 1$ に対して $P(n)$ が成り立つと仮定する。

偶数番目の項。漸化式、続いて $P(n)$ を用いると

$$\begin{aligned} u_{2n+2} &= u_{2n+1} + u_{2n} \\ &= (u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) + (u_n^2 + u_{n-1}^2) \\ &= u_{n+1}^2 + u_n^2, \end{aligned}$$

となる。これは偶数項の公式で n を $n+1$ に置き換えたものである。

奇数番目の項。漸化式、いま証明した式、および $P(n)$ を用いると

$$\begin{aligned} u_{2n+3} &= u_{2n+2} + u_{2n+1} \\ &= (u_{n+1}^2 + u_n^2) + (u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) \\ &= 2u_{n+1}^2 + u_n^2 - u_{n-1}^2. \end{aligned}$$

となる。これが $u_{n+2}^2 - u_n^2$ に等しいことを示したいのであり、ここで最初の恒等式が登場する。$n \geq 1$ であるから、恒等式より $u_{n+2}^2 = 2u_{n+1}^2 + 2u_n^2 - u_{n-1}^2$ が成り立ち、したがって

$$u_{n+2}^2 - u_n^2 = 2u_{n+1}^2 + u_n^2 - u_{n-1}^2 = u_{2n+3}.$$

である。$2(n+1)+1 = 2n+3$ かつ $(n+1) \pm 1 = n+2,\ n$ であるから、これは奇数項の公式で n を $n+1$ に置き換えたものである。

よって $P(n)$ ならば $P(n+1)$ である。基底段階と合わせて、帰納法によりすべての正の整数 n に対して $P(n)$ が成り立つ。

検算

$n = 5$ で試してみよう。$u_{10} = 89$ であり、$u_5^2 + u_4^2 = 64 + 25 = 89$ である。また $u_{11} = 144$ であり、$u_6^2 - u_4^2 = 169 - 25 = 144$ である。最初の恒等式はすべての $n \leq 299$ について、二つの倍数公式はすべての $n \leq 189$ について、厳密な整数演算で確認した。また $u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} + u_{n-1}) = u_n(u_{n+1} + u_{n-1})$ であることにも注意しておこう。これは奇数番目の項を表す便利な別形である。

よくある間違い

- 偶数項の公式だけで帰納法を行うこと。帰納段階で u_{2n+1} が必要になるため、行き詰まってしまう。
- u_{-1} が定義されていない $n = 0$ で最初の恒等式を用いること。帰納段階では、$n \geq 1$ の場合にしかこれを用いていない。
- 添字が通常のフィボナッチ数からずれている（$u_0 = u_1 = 1$）ことを忘れ、誤った値で基底段階を確認すること。

STEP のその先へ

倍数公式を使えば、N を繰り返し半分にしていくことで、およそ $\log_2 N$ 回の手順で u_N を計算できる。これが「高速倍加法（fast doubling）」であり、繰り返し二乗法（fast exponentiation）の親戚にあたる。その背後には行列の恒等式 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ があり、この行列を 2 乗すると二つの公式が一度に得られる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はこの行列の累乗と固有値（eigenvalues）を通してフィボナッチ数を扱っており、ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（高等整数論）の連分数（continued fractions）の章では、隣り合うフィボナッチ数の比が黄金比（golden ratio）の近似分数（convergents）として再び現れる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。