解答例

STEP III 1999、第 4 問

純粋数学 • オイラーの公式と多面体

> **STEP III 1999、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 7.9 節「**正多面体はただ五つ**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/platonic-solids.html

鍵となる考え方

辺の数を 2 通りの方法で数える。1 つは面をめぐって数える方法、もう 1 つは頂点をめぐって数える方法である。どちらの数え方でも E が F（または V）で表され、それらをオイラー（Euler）の公式に代入すると F についての方程式が 1 つだけ残る。その後の分類全体は、ただ 1 つの観察に帰着する。すなわち F は正であるから h も正でなければならず、これを満たす整数の組 (m, n) はごくわずかしか残らない。

解答

F の式の導出

各面は m 角形であるから、m 本の辺をもつ。すべての面をめぐって辺を数えると mF となる。しかし各辺はちょうど 2 つの面の境界になっているので、この数え方ではどの辺も 2 回ずつ数えられている：

$$mF = 2E.$$

同様に、各頂点には n 本の辺が集まるので、頂点ごとに辺を数えると nV となる。各辺はちょうど 2 つの端点をもつので、こちらもどの辺も 2 回ずつ数えている：

$$nV = 2E.$$

よって $E = \frac{1}{2}mF$、$V = \frac{2E}{n} = \frac{mF}{n}$ である。これを $V - E + F = 2$ に代入すると

$$\frac{mF}{n} - \frac{mF}{2} + F = 2$$
$$F\,(2m - mn + 2n) = 4n \qquad \text{（両辺に } 2n \text{ を掛けた）.}$$

ここで与えられた h を展開すると

$$4 - (n-2)(m-2) = 4 - (mn - 2m - 2n + 4) = 2m + 2n - mn,$$

となり、これはちょうど上の括弧の中身である。よって $Fh = 4n$ である。F と n は正であるから $h \neq 0$ であり、両辺を割ることができる：

$$F = \frac{4n}{h}, \qquad h = 4 - (n-2)(m-2),$$

これが示すべき式である。

正多面体はちょうど 5 つしかない

考えてみよう 公式からではなく幾何学から、m と n にどのような制約がつくか。

多角形は少なくとも 3 つの辺をもつので $m \geq 3$ である。立体の頂点では少なくとも 3 つの面が集まらなければならない。2 つの面だけが角で接していると、立体の角ではなく平らなひだになってしまうからである。よって $n \geq 3$ でもある。したがって $m - 2 \geq 1$ かつ $n - 2 \geq 1$ である。

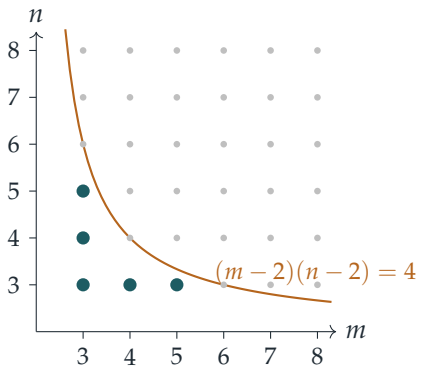
$F > 0$ かつ $4n > 0$ であるから、公式により $h > 0$、すなわち

$$(m-2)(n-2) < 4.$$

でなければならない。したがって 2 つの正の整数 $m-2$ と $n-2$ の積は 1、2、3 のいずれかであり、$h = 3$、2、1 となる。可能な因数分解は次のものに限られる：

- $(m-2)(n-2) = 1$：$m = n = 3$ であり、$h = 3$；
- $(m-2)(n-2) = 2$：$(m,n) = (3,4)$ または $(4,3)$ であり、$h = 2$；
- $(m-2)(n-2) = 3$：$(m,n) = (3,5)$ または $(5,3)$ であり、$h = 1$。

図も同じことを示している。$m, n \geq 3$ を満たす格子点のうち、双曲線（hyperbola）$(m-2)(n-2) = 4$ の真に内側にあるものがそれである。



それぞれの組について、$F = 4n/h$、$E = \frac{1}{2}mF$、$V = mF/n$ である：

	m	n	h	V	E	F
正四面体	3	3	3	4	6	4
正八面体	3	4	2	6	12	8
立方体	4	3	2	8	12	6
正二十面体	3	5	1	12	30	20
正十二面体	5	3	1	20	30	12

たとえば正二十面体（icosahedron）では $F = 4 \cdot 5/1 = 20$、$E = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 20 = 30$、$V = 3 \cdot 20/5 = 12$ である。

したがって (m, n) の組合せは多くとも 5 通りしかありえない。表に挙げたおなじみの 5 つのプラトンの立体（Platonic solids）が示すとおり、そのそれぞれが実際に存在する。よって正多面体（regular polyhedron）はちょうど 5 つである。

検算

- どの行も $V - E + F = 2$ を満たしている。正十二面体では $20 - 30 + 12 = 2$ である。
- 立方体では $V = 8$、$E = 12$、$F = 6$ となり、これはサイコロで実際に数えて確かめられる。
- m と n を入れ替えると V と F が入れ替わり、E は変わらない（立方体と正八面体、正十二面体と正二十面体）。これが双対性（duality）である。各面の中心に頂点を置けばよい。
- 独立な検算：各頂点での角欠損（angle deficit）$2\pi - n\pi(m-2)/m$ は正でなければならず、V 個の頂点すべてにわたる総和は 4π になる（デカルト（Descartes）の定理）。これは 5 つすべてで成り立ち、また $3 \le m, n < 200$ の範囲をコンピュータで探索しても、$h > 0$ となる組はほかに見つからなかった。

よくある間違い

- 辺を数えるときに因子 2 を忘れること。各辺は 2 つの面に属し、2 つの端をもつ。
- $n \geq 3$ である理由を述べないこと。この条件がなければ、$n = 2$ のときどの m に対しても $h = 4$ となり、「解」が無数に出てしまう。
- 数え上げだけから「ちょうど 5 つ」と結論すること。この議論が示すのは**多くとも** 5 つであることにすぎない。各場合が存在することを示すには、実際の立体が必要である。

STEP のその先へ

オイラーの公式は位相幾何学（topology）の出発点である。数 $V - E + F$（**オイラー標数**（Euler characteristic））は、曲面を面に分割するどのような方法についても同じ値をとる。そのため球面では 2、トーラスでは 0、などとなる。同じ議論をトーラス上で繰り返すと、正方形の格子のような「正則」なタイル張りが無数に得られる。また、5 つの立体の対称性の群は、初めて学ぶ群論（group theory）の講義でも中心的な例となる。読みやすい解説としては Richeson, *Euler's Gem*（オイラーの公式をめぐる一般向けの本）を読むとよい。Armstrong, *Basic Topology*（位相幾何学の入門書）はこれらの考え方をさらに先へ進めている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。