解答例

STEP III 1999、第 3 問

純粋数学 ・ リーマン和と極限

> **STEP III 1999、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q3

鍵となる考え方

式 $\frac{1}{n}\sum f(1+m/n)$ は、$[1,2]$ の上に立つ幅 $\frac{1}{n}$ の細い長方形 n 個の面積の合計である。長方形を細くしていくと、それらは曲線の下の面積をちょうど埋め尽くす。残りの二つの極限（limit）も、実は同じ図が姿を変えたものにすぎない。やるべきことは、因数 $\frac{1}{n}$ をくくり出し、各項を m/n だけの関数として書くことである。

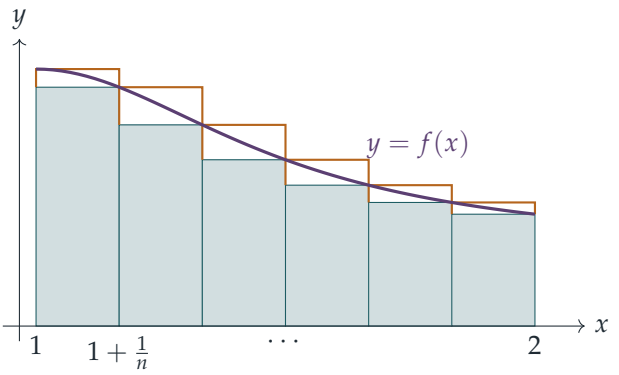
解答

極限の公式

$[1,2]$ を幅 $\frac{1}{n}$ の n 個の帯に分ける。m 番目の帯は $[1+\frac{m-1}{n}, 1+\frac{m}{n}]$ である。その上に、帯の右端における f の値 $f(1+m/n)$ を高さとする長方形を立てる。その面積は $\frac{1}{n}f(1+m/n)$ であるから、

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(1+m/n)$$

は長方形の面積の合計である。



図は減少関数（decreasing function）f の場合である。網掛けした（ティール色の）長方形は右端の高さを用いているので、曲線の下にある。その上に描いた琥珀色の階段は、左端の高さを用いた場合に得られる長方形を表しており、こちらは曲線の上にある。したがって

$$S_n \;\le\; \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; S_n + (\text{琥珀色の部分の面積の合計}).$$

ここで、琥珀色の部分をすべて横にずらして、幅 $\frac{1}{n}$ の一本の柱にまとめてみる。高さは次々に打ち消し合う（telescope）ので、積み上がった高さの合計は $f(1)-f(2)$ となる。よって

$$0 \;\le\; \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - S_n \;\le\; \frac{f(1)-f(2)}{n} \;\longrightarrow\; 0 \quad \text{ただし} n\to\infty,$$

となり、$S_n \to \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ である。増加関数 f の場合も、不等号の向きを逆にすれば同様に示せる。また、まともな関数（たとえば連続（continuous）かつ区分的に単調（piecewise monotonic）な関数）であれば、有限個の単調な部分に切り分けることができ、各部分の誤差は $\frac{1}{n}$ のオーダーである。以上により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(1+m/n) = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

が正当化される。

極限 $\ln 2$

考えてみよう $\dfrac{1}{n+m}$ を $\dfrac{1}{n}f(1+m/n)$ の形に見せるにはどうすればよいか。

分母から因数 n をくくり出す：

$$\frac{1}{n+m} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+m/n} = \frac{1}{n}f(1+m/n) \qquad \text{ただし} f(x)=\frac{1}{x}.$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{1+m/n}$$
$$=\int_1^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln 2-\ln 1=\ln 2,$$

となり、示すべきことが得られた。（ここで f は減少関数なので、図による議論がそのまま当てはまる。さらに、和が $\ln 2-\frac{1}{2n}$ と $\ln 2$ の間にあることまでわかる。）

最後の極限

m 番目の項は $\dfrac{n}{n^2+m^2}$（$m=1,\ldots,n$）である。分子と分母を n^2 で割ると

$$\frac{n}{n^2+m^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(m/n)^2}.$$

公式は f を $x=1+m/n$ で評価するので、これに合わせるには $f(x)=\dfrac{1}{1+(x-1)^2}$ とすればよい。このとき $f(1+m/n)=\dfrac{1}{1+(m/n)^2}$ となる。この f は $[1,2]$ で減少する。したがって

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{n}{n^2+m^2}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{1+(x-1)^2}=\Big[\tan^{-1}(x-1)\Big]_1^2$$
$$=\tan^{-1}1-\tan^{-1}0=\frac{\pi}{4}.$$

（同じことだが、置換 $u=x-1$ を行えば $\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ が得られる。）

検算

和は直接計算できる。$n=1000$ のとき、二番目の和は 0.69290 で $\ln 2\approx 0.69315$ と比べられ、三番目の和は 0.78515 で $\pi/4\approx 0.78540$ と比べられる。どちらの場合も不足分は約 $\frac{1}{4000}$ であり、図から得た上界 $\frac{f(1)-f(2)}{n}=\frac{1}{2000}$ の範囲内に収まっている。また、どちらの和も極限よりわずかに小さくなっており、右端の高さを用いた減少関数 f の場合として当然の結果である。

よくある間違い

- 三番目の極限を $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ と書いてしまう。公式は f を m/n ではなく $1+m/n$ で評価するので、1 だけのずれを f の中に組み込まなければならない。
- 最後の項（$m=n$）が $\frac{n}{2n^2}$ であり、これが $\frac{1}{n}f(2)$ に一致することを忘れる。和は $n+1$ 個の点ではなく、n 個の右端点すべてにわたってとられる。

STEP のその先へ

これらはリーマン和（Riemann sum）であり、図による議論はリーマン積分（Riemann integral）の定義の種となるものである。関数が可積分（integrable）であるとは、上限和と下限和（upper and lower sums）を挟み込んで一致させられることであり、閉区間上の連続関数はすべてこの性質をもつ。同じ考え方は逆向きにも使え、和を積分に置き換えて評価することができる。たとえば $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ が収束することの証明がその例である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）には、リーマン積分についてのとても読みやすい章がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。