解答例

STEP III 1999、第 2 問

純粋数学 • 実数解の個数

STEP III 1999、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s3-q2

鍵となる考え方

小問 (i) では、導関数（derivative）が完全平方式（perfect square）と e^x の積に因数分解されるので、関数は決して減少せず、実際には狭義単調増加（strictly increasing）である。小問 (ii) では、新しい関数の導関数がちょうど $(1+x^2)\mathrm{e}^x = k$ のときに 0 になる。これは小問 (i) の方程式にほかならない。このことから、新しい関数はただ一つの極値点（turning point）、すなわち最小点をもつことがわかる。あとはすべて $x \to -\infty$ のときの振る舞いにかかっており、そこでは $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$ となる。数 $2/\pi$ はここから現れるのである。

解答

小問 (i)

積の微分法（product rule）により、

$$\mathrm{f}'(x) = 2x\,\mathrm{e}^x + (1+x^2)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(x^2+2x+1\right) = \mathrm{e}^x(1+x)^2.$$

$\mathrm{e}^x > 0$ かつ $(1+x)^2 \geq 0$ であるから、すべての x に対して $\mathrm{f}'(x) \geq 0$ であり、題意が示された。等号は $x = -1$ のときに限り成り立つ。

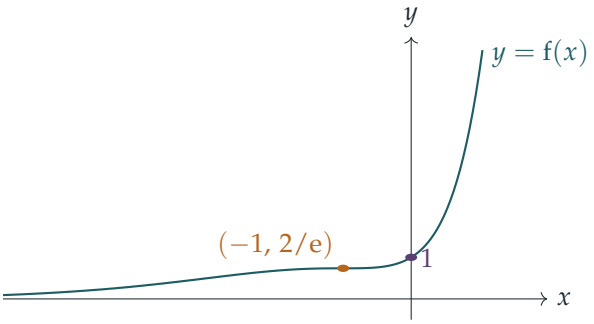
考えてみよう $\mathrm{f}'(-1) = 0$ であるのに、f は本当に狭義単調増加なのだろうか？

その通りである。$a < b$ ならば $\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a) = \int_a^b \mathrm{f}'(x)\,\mathrm{d}x$ であり、被積分関数（integrand）は連続かつ非負で、$[a,b]$ 上で 0 となる点は高々一つしかないから、この積分は真に正である。停留点（stationary point）が一つあるだけでは、関数の増加は妨げられない。

ここで $x = -1$ は停留点であると同時に変曲点（point of inflection）でもあり、その両側で f' は正である。

概形を描くには、次のことを押さえておけばよい。

- 二つの因数はともに正であるから、すべての x に対して $f(x) > 0$ である。
- $f(0) = 1$ であり、変曲点は $(-1, 2/e) \approx (-1, 0.74)$ である。
- $x \to \infty$ のとき $f(x) \to \infty$ である。
- $x \to -\infty$ のとき $f(x) \to 0$ である。e^x は、どんな多項式が増大するよりも速く減衰するからである（$x^2 e^x \to 0$）。したがって、x 軸の負の部分は漸近線（asymptote）である。



さて、f は連続かつ狭義単調増加であり、$x \to -\infty$ のとき $f(x) \to 0$、$x \to \infty$ のとき $f(x) \to \infty$ である。よって中間値の定理（intermediate value theorem）より、この関数は $(0, \infty)$ のすべての値をとり、狭義単調増加であることから、それぞれの値をちょうど一回だけとる。また $f > 0$ であるから、≤ 0 の値をとることはない。したがって、$(1 + x^2)e^x = k$ は $k > 0$ のときちょうど一つの実数解（real root）をもち、$k \leq 0$ のときは実数解をもたない。 ■

小問 (ii)

次のようにおく。

$$g(x) = e^x - 1 - k \tan^{-1} x.$$

まず直ちに $g(0) = 1 - 1 - 0 = 0$ であるから、$x = 0$ はつねに解である。次に、

$$g'(x) = e^x - \frac{k}{1 + x^2} = \frac{(1 + x^2)e^x - k}{1 + x^2} = \frac{f(x) - k}{1 + x^2}.$$

どちらの場合も $k > 0$ であるから、小問 (i) により $f(a) = k$ を満たす数 a がちょうど一つ存在する。f は狭義単調増加であるから、$x < a$ では $f(x) < k$、$x > a$ では $f(x) > k$

である。よって

$$\mathrm{g}'(x) < 0 \text{ ただし} x < a, \qquad \mathrm{g}'(x) > 0 \text{ ただし} x > a.$$

したがって、g は $(-\infty, a]$ で狭義単調減少（strictly decreasing）、$[a, \infty)$ で狭義単調増加であり、$x = a$ でただ一つの最小値をとる。特に、g の解は a の両側にそれぞれ高々一つずつしかなく、全部で高々二つである。

a はどこにあるか？ どちらの場合も $k < 1 = \mathrm{f}(0)$ であるから $\mathrm{f}(a) = k < \mathrm{f}(0)$ となり、$a < 0$ を得る。すると $x = 0$ は増加する区間 $[a, \infty)$ に含まれる。これはその区間におけるただ一つの解であり、

$$\mathrm{g}(a) < \mathrm{g}(0) = 0.$$

残るのは、g が $(-\infty, a)$ にも解をもつかどうかを判定することである。

$x \to -\infty$ のときの振る舞い。 $\mathrm{e}^x \to 0$ かつ $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$ であるから、

$$\mathrm{g}(x) \to -1 + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left(k - \frac{2}{\pi}\right) \quad \text{ただし} x \to -\infty.$$

この極限を L とおく。g は $(-\infty, a]$ で狭義単調減少であるから、そこでの g の値はすべて L より真に小さい。これを確かめるため、$x \le a$ と任意の $x' < x$ をとる。$y < x'$ ならばつねに $\mathrm{g}(y) > \mathrm{g}(x')$ であるから、$y \to -\infty$ とすると $L \ge \mathrm{g}(x')$ を得る。よって $\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(x') \le L$ である。

(a) $0 < k \le 2/\pi$ の場合。 このとき $L \le 0$ であるから、すべての $x \le a$ に対して $\mathrm{g}(x) < L \le 0$ である。a より左に解はなく、方程式は**ちょうど一つの実数解**をもつ。それは $x = 0$ である。

(b) $2/\pi < k < 1$ の場合。 このとき $L > 0$ であるから、負の方向に十分大きい x に対して $\mathrm{g}(x) > 0$ であり、一方で $\mathrm{g}(a) < 0$ である。中間値の定理により $(-\infty, a)$ に解が存在し、g は狭義単調減少であるから、そこでの解はそれ一つだけである。$x = 0$ と合わせて、方程式は**ちょうど二つの実数解**をもつ。すなわち、一つの負の解（a より小さい）と $x = 0$ である。

考えてみよう 境界の場合 $k = 2/\pi$ が (a) に含まれるのはなぜか？

$k = 2/\pi$ のとき、左側の極限はちょうど $L = 0$ である。減少する部分は下から 0 に近づくが、決してそこに到達しないので、二つ目の解は現れない。これを決定づけるのは狭義の単調性である。

検算

- 無作為に選んだ点で f を数値的に微分すると $e^x(1+x)^2$ と一致し、また $f(-1) = 2/e \approx 0.736$ である。
- g の符号変化を、$[-200, 10]$ 上の細かい格子で数えた。$k = 0.05, 0.3, 0.5, 0.6$ および $2/\pi \approx 0.6366$ では解は一つ、$k = 0.65, 0.7, 0.8, 0.9, 0.99$ では解は二つであった。$k = 0.65$ では、$L = 0.65 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.021$ が非常に小さいため、負の解はかなり遠く（$x \approx -31$ 付近）にある。
- 最小点は $k = 0.7$ のとき $a \approx -1.81$ であり、$k \to 1^-$ のとき $a \to 0^-$ となる。これは整合的である。実際、$k = 1$ のとき $g'(0) = 0$ となり、$x = 0$ は重解（double root）になる。

よくある間違い

- $x = 0$ がつねに解であることを忘れ、$-\infty$ での符号変化から生じる解だけを数えてしまう。
- $x \to -\infty$ のとき $\tan^{-1} x \to -\infty$ とみなしてしまう。実際には有界であり、$-\frac{\pi}{2}$ に近づく。
- $f'(-1) = 0$ から、f は $x = -1$ で極値をとると結論づけてしまう。

STEP のその先へ

ここでの議論は、実解析（real analysis）の標準的な手法の好例である。区間上で連続かつ狭義単調な関数は、その区間に高々一つしか零点をもたず、零点をもつかどうかは中間値の定理（無限遠での極限と組み合わせて用いる）によってわかる。関数の極値点を求め、極値点と両端で符号を調べることによって解の個数を数えるという考え方は、ロルの定理（Rolle's theorem）とその帰結の背後にあるものである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、連続性、中間値の定理、平均値の定理（mean value theorem）を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。