解答例

# STEP III 1999、第 14 問

確率・統計 ・ 条件付けによる期待値

**STEP III 1999、問 14**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s3-q14

## 鍵となる考え方

H1 では賞金は最初の成功がいつ起こるかだけで決まるので、期待値（expectation）は有限の等差・等比型の和（arithmetico-geometric sum）$\sum r\,p\,q^{r-1}$ となる。このような和を求める定番の方法は、和から和の $q$ 倍を引くことである。H2 では手番の回数 $N$ で条件付け（conditioning）を行い、H1 の答えをポアソン分布（Poisson distribution）について平均する。そのために必要なのはポアソン分布に関する和 $\sum \lambda^n x^n/n!$ と $\sum n\lambda^n x^n/n!$ だけであり、どちらも指数関数の級数（exponential series）から得られる。

## 解答

### ゲーム H1

彼女の賞金を $W$（ポンド）とする。各手番は独立であり、それぞれ確率 $p$ で成功する。最初の成功が手番 $r$ で起こるのは、最初の $r-1$ 回の手番がすべて失敗し、手番 $r$ が成功するとき、かつそのときに限るので、

$$\mathrm{P}(W=r) = q^{r-1}p \qquad (1 \le r \le n),$$

であり、それ以外の場合は $W=0$ で、これは期待値に何も寄与しない。よって

$$\mathrm{E}(W) = p\,S, \qquad \text{ただし} S = \sum_{r=1}^{n} r\,q^{r-1} = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1}.$$

$q$ を掛けて引き、$q$ の同じ累乗をそろえると、

$$\begin{aligned} S - qS &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} - nq^n \\ &= \frac{1-q^n}{1-q} - nq^n, \end{aligned}$$

となる。ここで等比級数（geometric series）の和の公式を用いたが、$q \neq 1$ であるからこれは正当である。$1-q=p$ であるから $S=\dfrac{1-q^n}{p^2}-\dfrac{nq^n}{p}$ を得て、したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W)=pS&=\frac{1-q^n-npq^n}{p}=\frac{1-q^n-n(1-q)q^n}{p}\\&=p^{-1}\left[1+nq^{n+1}-(n+1)q^n\right],\end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

### ゲーム H2

許される手番の回数を $N\sim\mathrm{Po}(\lambda)$ とすると、$\mathrm{P}(N=n)=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n/n!$ である。

$$g(n)=p^{-1}\left[1+nq^{n+1}-(n+1)q^n\right].$$

とおく。$N=n\geq 1$ のとき、彼女は手番 $n$ 回の H1 を行うので、賞金の期待値は $g(n)$ である。$N=0$ のときは何も得られない。全期待値の法則（law of total expectation）により（$N$ で条件付けて）、

$$\mathrm{E}(W)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(N=n)\,g(n).$$

**考えてみよう** $g(n)$ の三つの部分は、$n=0$ から始まる完全なポアソン分布の和として扱うほうが簡単になるであろう。和を $n=0$ から始めてよいだろうか？

よい。$g(0)=p^{-1}[1+0-1]=0$ であり、これは $N=0$ のとき賞金がゼロであることと一致する。したがって

$$\mathrm{E}(W)=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\left[1+nq^{n+1}-nq^n-q^n\right].$$

第 1 項の和は 1 である。確率の総和は 1 だからである。残りの項については、すべての実数 $x$ に対して成り立つ次の二つの級数が必要である。

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^n}{n!}&=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x},\\\sum_{n=0}^{\infty}n\,\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^n}{n!}&=\lambda x\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}=\lambda x\,\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x}.\end{aligned}$$

$x=q$ とおき、$\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda q}=\mathrm{e}^{-\lambda(1-q)}=\mathrm{e}^{-\lambda p}$ に注意する。すると

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,q^n=\mathrm{e}^{-\lambda p},\qquad\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,nq^n=\lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p}.$$

項 $nq^{n+1}$ は $nq^n$ の $q$ 倍であるから、その寄与は $\lambda q^2 \mathrm{e}^{-\lambda p}$ である。以上をまとめると、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W) &= \frac{1}{p}\left[1 + \lambda q^2 \mathrm{e}^{-\lambda p} - \lambda q\, \mathrm{e}^{-\lambda p} - \mathrm{e}^{-\lambda p}\right] \\ &= \frac{1}{p}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda p}) + \frac{\lambda q(q-1)}{p}\, \mathrm{e}^{-\lambda p} \\ &= \frac{1}{p}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda p}) - \lambda q\, \mathrm{e}^{-\lambda p},\end{aligned}$$

となる。最後の段階では $q - 1 = -p$ を用いた。これが求める式（単位はポンド）である。

## 検算

- H1 で $n = 1$ のとき、公式は $p^{-1}[1 + q^2 - 2q] = p^{-1}(1-q)^2 = p$ を与える。彼女は確率 $p$ で £1 を得るのだから、これは正しい。
- H1 で $n \to \infty$ とすると $q^n \to 0$ かつ $nq^n \to 0$ であるから、期待値は幾何分布（geometric distribution）の平均 $1/p$ に近づく。同様に、H2 も $\lambda \to \infty$ のとき $1/p$ に近づく。
- $\lambda$ が小さいとき、指数関数を展開すると $\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 p - \lambda q + O(\lambda^2) = \lambda p + O(\lambda^2)$ となる。これは納得できる。彼女はほとんどの場合、手番が 0 回か 1 回であり、$\mathrm{P}(N = 1) \approx \lambda$ だからである。
- 数値的には、$n \le 14$ について H1 の公式は直接計算した和と（分数を用いて）完全に一致した。H2 の公式は打ち切ったポアソン分布の和と一致し、$\lambda = 2$、$p = 0.4$ として $4 \times 10^5$ 回のゲームをシミュレーションしたところ 0.836 となり、公式の値 0.837 とよく合った。

## よくある間違い

- $S - qS$ の最後の項を間違える。和 $S$ は $nq^{n-1}$ で終わるので、$qS$ を引くと $-nq^n$ が残る。
- $\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda q}$ が $\mathrm{e}^{-\lambda p}$ に簡約されることを見落とし、式変形の中で迷子になる。

## STEP のその先へ

H2 で用いた和 $\sum \mathrm{P}(N = n)\, x^n$ は**確率母関数**（probability generating function）$G_N(x) = \mathrm{E}(x^N)$ の値であり、$\sum n\, \mathrm{P}(N = n)\, x^n = xG'_N(x)$ が成り立つ。ポアソン分布に従う確率

変数では $G_N(x) = \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}$ である。母関数は、試行回数が確率的に決まる場合の条件付けとともに、大学 1 年次の確率論の中心的な道具であり、たとえば確率変数の個数が確率的な和（random sum）や分枝過程（branching process）の研究で用いられる。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、その両方をわかりやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。