解答例

STEP III 1999、第 12 問

確率・統計 ・ 離散同時分布

> **STEP III 1999、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q12

鍵となる考え方

同時確率（joint probability）は j と k に主として $j+k$ を通じて依存するので、項を合計 $n=j+k$ ごとにまとめる。残るのは $\sum_j \frac{1}{j!(n-j)!}$ であり、これは姿を変えた二項係数の和である。実際、$n!$ を掛ければ $\sum_j \binom{n}{j} = 2^n$ となる。その後は、どの小問も指数級数（exponential series）の計算になる。

解答

小問 (i)

$n \geq 1$ とする。事象 $\{X+Y=n\}$ は、$j=0,1,\ldots,n$ に対する事象 $\{X=j,\ Y=n-j\}$ の互いに排反な和（disjoint union）である。これらのそれぞれにおいて $j+k=n$ であるから、

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X+Y=n) &= \sum_{j=0}^{n} \mathrm{e}^{-1}\frac{n\lambda^n}{j!\,(n-j)!} = \mathrm{e}^{-1}\frac{n\lambda^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} \\ &= \mathrm{e}^{-1}\frac{n\lambda^n 2^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^{-1}(2\lambda)^n}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

となる。ここで、二項定理（binomial theorem）による $\sum_j \binom{n}{j} = (1+1)^n = 2^n$ と、$n \geq 1$ に対する $n/n! = 1/(n-1)!$ を用いた。

念のため述べておくと、因子 $j+k$ があるため $\mathrm{P}(X+Y=0) = \mathrm{P}(X=0,\ Y=0) = 0$ である。

小問 (ii)

すべての $n \geq 0$ にわたる確率 $\mathrm{P}(X+Y=n)$ の和は 1 でなければならない。$n=0$ の項は 0 であるから、

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1}(2\lambda)^n}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{-1}(2\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)^m}{m!} = \mathrm{e}^{-1}\, 2\lambda\, \mathrm{e}^{2\lambda},$$

となる。ここで $m = n-1$ とおき、指数級数 $\sum_m t^m/m! = \mathrm{e}^t$ を用いた。よって、求めるとおり $2\lambda\, \mathrm{e}^{2\lambda-1} = 1$ である。

小問 (iii)

$g(x) = 2x\, \mathrm{e}^{2x-1}$ とおく。積の微分法（product rule）により、

$$g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x-1} + 4x\, \mathrm{e}^{2x-1} = 2(1+2x)\, \mathrm{e}^{2x-1}.$$

$x > 0$ のとき $1+2x$ と e^{2x-1} はともに正であるから、$g'(x) > 0$ であり、g は $x > 0$ で狭義単調増加（strictly increasing）である。

考えてみよう なぜ「増加する」ことから「解は高々 1 つ」が導かれるのか？

$0 < x_1 < x_2$ ならば $g(x_1) < g(x_2)$ であるから、g が異なる 2 点で値 1 をとることはない。$\lambda > 0$ であるから、(ii) で得た方程式 $g(\lambda) = 1$ の解は高々 1 つである。

そこで、指数を 0 にする自然な候補 $x = \frac{1}{2}$ を試すと、$g(\frac{1}{2}) = 1 \cdot \mathrm{e}^0 = 1$ となる。したがって $\frac{1}{2}$ は解であり、一意性によりこれが唯一の解である：

$$\lambda = \tfrac{1}{2}.$$

この値のもとで、小問 (i) の結果は $n \geq 1$ に対して $\mathrm{P}(X+Y=n) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{(n-1)!}$ となる。

小問 (iv)

$X+Y$ は $n \geq 1$ の値のみをとり、その確率は先ほど求めたとおりであるから、

$$\mathrm{E}(2^{X+Y}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\mathrm{e}^{-1}}{(n-1)!} = 2\mathrm{e}^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{m!} = 2\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^2 = 2\mathrm{e},$$

となる。ここでも $m = n-1$ とおき、指数級数を用いた（この級数は収束するので、期待値（expectation）は有限である）。

検算

- $\lambda = \frac{1}{2}$ のとき、(i) の式は $X + Y - 1$ が平均 1 のポアソン分布（Poisson distribution）に従うことを示している。その確率 $\mathrm{e}^{-1}/m!$ の和は確かに 1 であり、(ii) と整合する。
- $j + k < 60$ の範囲で同時確率を数値的に足し合わせると合計は 1.000000 となり、$2^{j+k}\,\mathrm{P}(X = j, Y = k)$ を足し合わせると 5.436564 となって、$2\mathrm{e} \approx 5.436564$ と一致する。
- (iv) の簡単な妥当性確認：$N \sim \mathrm{Po}(1)$ として $2^{X+Y} = 2 \cdot 2^N$ であり、ポアソン分布に従う確率変数では $\mathrm{E}(s^N) = \mathrm{e}^{s-1}$ であるから、答えは $2\mathrm{e}^1$ となる。

よくある間違い

- $n/n! = 1/(n-1)!$ を忘れ、(ii) の級数の中に扱いにくい因子 n が残ってしまう。
- $n = 0$ の項を 0 でないものとして扱う。因子 $j + k$ によってこの項は消え、まさにそのために和は $n = 1$ から始まる。
- (iii) で、$\lambda = \frac{1}{2}$ が解であることだけを示す。ほかに解がないことを示すには、単調性（monotonicity）も必要である。

STEP のその先へ

量 $\mathrm{E}(s^{X+Y})$ は $X + Y$ の**確率母関数**（probability generating function）であり、ここではそれを $s = 2$ で評価している。母関数は確率の和をべき級数に変換するもので、大学の最初の確率論の講義では、分布を特定したり積率（moments）を求めたりするための標準的な道具である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）には、母関数とポアソン分布についての明快な解説がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。