解答例

STEP III 1999、第 11 問

力学 ・ 剛体の回転

> **STEP III 1999、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q11

鍵となる考え方

輪が台の縁に乗った後は、輪は固定点のまわりに回転する剛体（rigid body）となるので、二つの方程式ですべてが片づく。エネルギー保存則（conservation of energy）から任意の角度における角速度（angular speed）が得られ、中心についてのニュートン（Newton）の第二法則を回転の中心方向に分解すると垂直抗力（normal reaction）が得られる。この垂直抗力が 0 になったときに接触が失われる。最初の部分で求める慣性モーメント（moment of inertia）は、まさにエネルギーの式に必要なものである。

解答

慣性モーメント

薄い輪のどの微小部分も中心 C から距離 a のところにあるので、C を通り輪の面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは

$$I_C = \sum \delta m\, a^2 = ma^2.$$

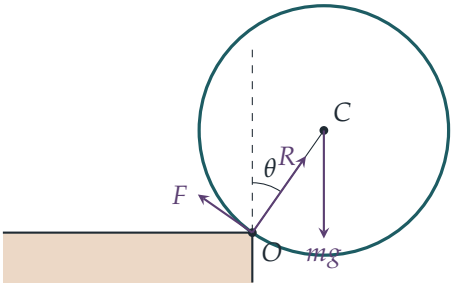
である。円周上の点 O は C から距離 a にあり、新しい軸はもとの軸に平行であるから、平行軸の定理（parallel axis theorem）により

$$I_O = I_C + ma^2 = 2ma^2.$$

となる。

縁を越えて転がる

輪を一様な剛体の環とし、台の縁を固定点 O とみなす。どちらの面も粗く、摩擦（friction）は十分に大きくて輪は決して滑らないと仮定する。すなわち、台の上では輪は転がり、縁を越えるときは滑らずに O のまわりに回転する。OC が鉛直上向きとなす角を θ とし、輪が縁に達した瞬間に $\theta = 0$ となるようにする。また $\omega = \dot{\theta}$ と書く。



考えてみよう 輪が縁に達した瞬間、O のまわりの輪の角速度はいくらか。

速さ v で滑らずに転がる輪の角速度は v/a であり、各瞬間における輪の運動は接触点のまわりの回転である。輪が縁に達した瞬間、接触点はまさに O であり、輪はそのまま O のまわりに回転し続ける。輪は接触を失わないので、衝突は起こらない。よって $\theta = 0$ のとき $\omega = v/a$ である。

エネルギー。輪が O と接触している間、O にはたらく力は仕事をしない（作用点が静止している）ので、力学的エネルギーは保存される。中心は $a - a\cos\theta$ だけ下がっているので

$$\tfrac{1}{2}(2ma^2)\,\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2ma^2)\left(\frac{v}{a}\right)^2 + mga(1-\cos\theta), \qquad \text{すなわち} \qquad a\omega^2 = \frac{v^2}{a} + g(1-\cos\theta).$$

となる。

回転の中心方向。中心 C は O を中心とする半径 a の円周上を動くので、その加速度は C から O へ向かう成分 $a\omega^2$ をもつ。輪にはたらく力は、重力 mg、OC に沿った垂直抗力 R（O から遠ざかる向きに押す）、そして OC に垂直な摩擦力 F であり、摩擦力は OC 方向の成分をもたない。CO 方向に分解すると

$$mg\cos\theta - R = ma\omega^2.$$

エネルギーの式を代入すると

$$R = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{a} - mg(1-\cos\theta) = mg(2\cos\theta - 1) - \frac{mv^2}{a}.$$

これは θ の増加とともに減少し、輪は R が初めて 0 になったときに縁との接触を失う。それが起こるのは

$$2g\cos\theta = g + \frac{v^2}{a}, \qquad \text{すなわち} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} + \frac{v^2}{2ag},$$

のときであり、これが示すべきことであった。

? **考えてみよう** これはすべての v に対して意味をもつだろうか。

$\theta = 0$ では $R = m(g - v^2/a)$ であり、これが正となるのは $v^2 < ag$ のときに限る。これは、輪が縁を越えて転がるときにただちに接触を失わないための条件であり、問題ではこれが仮定されている。そしてこれは右辺が 1 より小さくなるための条件とちょうど一致するので、条件を満たす角 θ が存在する。

念のため、$I_O\ddot{\theta} = mga\sin\theta$ を用いて OC に垂直な方向に分解すると、$\ddot{\theta} = g\sin\theta/(2a)$ および $F = \frac{1}{2}mg\sin\theta$ が得られる。これは滑りを防ぐために縁が与えなければならない摩擦力であり、両方の面が粗くなければならないのはこのためである。

検算

- $v \to 0$ のとき、輪は縁から単に倒れ落ち、$\cos\theta = \frac{1}{2}$、すなわち $\theta = 60°$ で接触を失う。$v^2 \to ag$ のとき $\theta \to 0$ であり、輪は縁にかろうじて触れるだけである。どちらの極限も理にかなっている。
- 数値的には、$a = 0.6\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$v = 1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ として、$\dot{\theta} = v/a$ から出発して $g\cos\theta = a\dot{\theta}^2$ となるまで $\ddot{\theta} = g\sin\theta/(2a)$ を数値的に進めると $\cos\theta \approx 0.69132$ となり、$\frac{1}{2} + v^2/(2ag) = 0.69133$ と一致する。

よくある間違い

- エネルギーの式で $I_C = ma^2$ を用いること、あるいは $\frac{1}{2}I_O\omega^2$ に加えて並進運動エネルギー（translational kinetic energy）の項を別に足してしまうこと。O のまわりの回転には、すでに中心の運動が含まれている。
- 初めの運動エネルギーを忘れること。そうすると、すべての v に対して $\cos\theta = \frac{1}{2}$ となってしまう。

STEP のその先へ

縁から転がり落ちる運動は、典型的な**片側拘束**（unilateral constraint）の例である。縁は押すことはできても引くことはできないので、運動方程式が成り立つのは、それが予測する抗力が非負である間だけである。球面から滑り落ちる質点や、太鼓橋を越える自動車も同じ考え方で扱われる。大学 1 年次の講義では、剛体の力学や平行軸の定理・垂直軸の定理（perpendicular axis theorem）とともにこれを学ぶ。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これらすべてを丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。