解答例

STEP III 1999、第 10 問

力学 ・ 落下する鎖の力積

> **STEP III 1999、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q10

鍵となる考え方

鎖が崩れ落ちていく間、まだぶら下がっている部分は自由落下（free fall）の状態にある。重力以外にそれを引くものは何もないのである。したがって、各輪はそれぞれの初めの位置からただ落ちるだけであり、輪ごとに異なるのはその落下の高さだけである。台は各輪を止めるために、輪 1 つにつき 1 回の力積（impulse）を与える。これらを足し合わせると平方根の和が得られ、n が大きいとき、これは $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ に対するリーマン和（Riemann sum）である。

解答

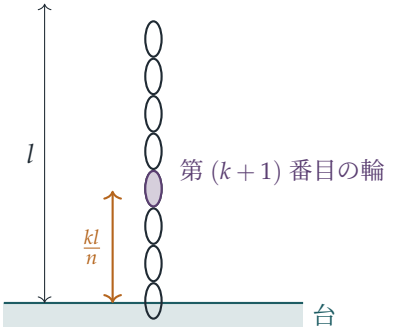
モデル

各輪の質量は $\frac{m}{n}$、長さは $\frac{l}{n}$ である。輪はなめらかで、鎖は完全にしなやかであるから、押す力を伝えることはできない。各輪を質点とみなし、台に達した瞬間に静止させられる（衝突は非弾性（inelastic）である）ものとして扱う。

> ? **考えてみよう** その下の輪が台によって止められているのに、なぜ鎖のぶら下がっている部分は自由落下しているのだろうか。

鎖を放したとき、張力（tension）がなければどの輪も加速度 g をもつ。そして張力が 0 のまま落下する鎖という状況には矛盾がない。すべての輪が一緒に動き、伸びることなく接したままでいるからである。台は輪を上向きに押して止めるが、しなやかな鎖はその押す力を上の輪へ伝えることができない。また、輪はなめらかなので、輪どうしの間に摩擦もない。したがって、まだ空中にある輪には重力以外の力ははたらか

ず、各輪は着地するまで自由に落下する。



第 $(k+1)$ 番目の輪

第 $(k+1)$ 番目の輪の下には k 個の輪があり、その長さの合計は $\frac{kl}{n}$ である。下端はちょうど台に触れているので、第 $(k+1)$ 番目の輪は台に達するまでに距離 $\frac{kl}{n}$ だけ落下する。静止状態から自由落下するので、到達時の速さは $v^2 = 2gs$ から次のように求まる。

$$v_k = \sqrt{\frac{2gkl}{n}}.$$

その後この輪は静止させられるので、運動量（momentum）の変化の大きさは

$$\frac{m}{n}\sqrt{\frac{2gkl}{n}} = \frac{m}{n}\sqrt{2gl}\,\sqrt{\frac{k}{n}},$$

であり、向きは上向きである（輪は下向きの運動量 $\frac{m}{n}v_k$ を失う）。$k = 0$ のときこれは 0 である。いちばん下の輪は初めから台に触れているからである。

力積の総和

ニュートン（Newton）の第三法則により、台が第 $(k+1)$ 番目の輪から受ける力積は、その輪の運動量の変化と大きさが等しく、向きは下向きである。輪には $k+1 = 1, 2, \ldots, n$ と番号が付いているので、衝突によって台が受ける力積の総和は

$$J = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m}{n}\sqrt{\frac{2gkl}{n}} = m\sqrt{2gl}\ \cdot\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}}.$$

である。

? **考えてみよう** $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k/n}$ はどの積分の近似になっているだろうか。

これは、幅 $\frac{1}{n}$ の n 個の長方形の面積の和であり、その高さは $[0,1]$ を分けた各小区間の左端 $x = 0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ における $\sqrt{x}$ の値である。したがって n が大きいとき

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} \approx \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

となり、それゆえ

$$J \approx \tfrac{2}{3}\, m\sqrt{2gl},$$

が成り立つ。これが示すべきことであった。

この近似の精度を調べてみよう。$\sqrt{x}$ は増加関数であるから、小区間 $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ 上では左端の高さ $\sqrt{k/n}$ は曲線より下にあり、$[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ 上では曲線より上にある。各小区間について足し合わせると

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \;\le\; \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} \;\le\; \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{すなわち} \quad \tfrac{2}{3}\Big(1-\tfrac{1}{n}\Big)^{3/2} \le \frac{J}{m\sqrt{2gl}} \le \tfrac{2}{3}.$$

を得る。上下の評価はともに $\frac{2}{3}$ に収束するので、相対誤差（relative error）は高々 $\frac{3}{2n}$ 程度である。

検算

- 単位：$m\sqrt{gl}$ は質量 × 速さであり、運動量である。力積はそうでなければならない。
- 数値で確かめる。$m=2$、$l=3$、$g=9.8$ とすると $\frac{2}{3}m\sqrt{2gl} \approx 10.224$ である。一方、正確な和は $n=10$ で 9.363、$n=100$ で 10.144、$n=1000$ で 10.216 である。比は 1 に近づき、常に上の評価の範囲内にある。
- 最後に着地する輪はほぼ長さ l 全体を落下し、その速さは $\sqrt{2gl}$ に近い。もし質量のすべてがこの速さで到達するなら、力積は $m\sqrt{2gl}$ になるはずである。ほとんどの輪はそれより短い距離しか落下しないので、答えがこの値のいくらかの割合になるのは理にかなっている。

よくある間違い

- 第 $(k+1)$ 番目の輪の落下距離を $\frac{(k+1)l}{n}$ としてしまう。その下にある輪は k 個だけである。
- すでに台の上に積もっている鎖の、一定の重さを含めてしまう。問題が求めているのは衝突による力積だけである。

STEP のその先へ

すべての輪は時間 $\sqrt{2l/g}$ のうちに着地するので、衝突だけで台に加わる平均の力は $\frac{2}{3}m\sqrt{2gl}/\sqrt{2l/g} = \frac{2}{3}mg$ である。実際には、各瞬間の衝撃力はすでに台の上にある鎖

の重さのちょうど 2 倍であり、台の下に置いたはかりの目盛りは、最後の輪が着地する瞬間に $3mg$ まで上昇する。このように質量が連続的に増えたり減ったりする問題（落下する鎖、ロケット、雨粒など）は、ニュートンの第二法則の可変質量（variable mass）の形を用いて扱われる。丁寧な取り扱いについては、Kleppner and Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。