解答例

STEP III 1999、第 1 問

純粋数学 • 3 次方程式の解

> **STEP III 1999、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q1

鍵となる考え方

ここでの議論はすべて解と係数の関係（Vieta's formulas）から導かれる。3 次方程式（cubic）$x^3 - px^2 + qx - r = 0$ の解（roots）を α, β, γ とすると、

$$\alpha + \beta + \gamma = p, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \qquad \alpha\beta\gamma = r.$$

等比数列（geometric progression）は中央の項を中心に**乗法的に**並んでいるので、積 r と比 q/p によって中央の解が特定される。一方、等差数列（arithmetic progression）は中央の項を中心に**加法的に**並んでいるので、こちらは和 p によって中央の解が特定される。

解答

小問 (i)

解が a/k、a、ak であるとする。a/k が意味をもつためには $k \neq 0$ でなければならない。また、解の積は $r \neq 0$ であるから、$a \neq 0$ でもある。解と係数の関係より

$$\begin{aligned} p &= \frac{a}{k} + a + ak = a\left(\frac{1}{k} + 1 + k\right), \\ q &= \frac{a}{k} \cdot a + a \cdot ak + \frac{a}{k} \cdot ak = a^2\left(\frac{1}{k} + 1 + k\right), \\ r &= \frac{a}{k} \cdot a \cdot ak = a^3. \end{aligned}$$

p と q には同じ括弧の式が現れる。$p \neq 0$ であるからこの式は 0 でなく、したがって割り算ができて

$$\frac{q}{p} = a.$$

よって q/p は解（中央の解）である。このとき $q = ap$ であるから、

$$q^3 = a^3p^3 = rp^3, \qquad \text{すなわち} \qquad q^3 - rp^3 = 0,$$

となり、示すべきことが得られた。

小問 (ii)

次に $r = q^3/p^3$ と仮定し、$a = q/p$ とおくと $r = a^3$ である。3 次方程式に $x = a$ を代入し、$p\,a^2 = q^2/p = q\,a$ を用いると

$$a^3 - pa^2 + qa - r = a^3 - qa + qa - a^3 = 0,$$

となるので、q/p は解である。

$r \neq 0$ より $q \neq 0$ であり、したがって $a \neq 0$ である。残りの 2 つの解を β、γ とおく。3 つの解の積は r であるから、$a \neq 0$ で割ることにより

$$a\beta\gamma = r = a^3 \quad \Longrightarrow \quad \beta\gamma = a^2 = \left(\frac{q}{p}\right)^2,$$

を得る。

> **考えてみよう** $\beta\gamma = a^2$ から、どのようにして a/k、a、ak の形にもち込めばよいだろうか？

k をうまく選ぶ必要がある。$\beta\gamma = a^2 \neq 0$ であるから、β も γ も 0 ではない。$k = \gamma/a$ と定めると、$\gamma = ak$ かつ $k \neq 0$ である。このとき

$$\beta = \frac{a^2}{\gamma} = \frac{a^2}{ak} = \frac{a}{k}.$$

よって解は a/k、a、ak であり、それぞれ直前の解に k を掛けて得られる。すなわち、これらは等比数列をなす。（β と γ が実数でない場合には、公比 k は複素数になることもある。この議論では解が実数であることを必要としない。）

小問 (i) と (ii) を合わせると、$p \neq 0$ かつ $r \neq 0$ のとき、解が等比数列をなすための必要十分条件は $q^3 = rp^3$ であることがわかる。

小問 (iii)

必要性。 解が $b - d$、b、$b + d$ であるとする。これらの和は $3b = p$ であるから、中央の解は $b = p/3$ である。3 次方程式に $x = p/3$ を代入して 27 を掛けると

$$p^3 - 3p^3 + 9pq - 27r = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2p^3 - 9pq + 27r = 0.$$

十分性。 逆に、$2p^3 - 9pq + 27r = 0$ と仮定する。上の議論を逆にたどれば、$p/3$ は解である。すると残りの 2 つの解の和は $p - p/3 = 2p/3$ となるので、ある（複素数の場合もある）d を用いてそれらを $p/3 - d$、$p/3 + d$ と書くことができる。3 つの解 $p/3 - d$、$p/3$、$p/3 + d$ は等差数列をなす。

したがって、求める必要十分条件（necessary and sufficient condition）は

$$\boxed{2p^3 - 9pq + 27r = 0}.$$

検算

- 解が $1, 2, 4$（等比数列）のとき、$p = 7$、$q = 14$、$r = 8$ である。このとき $q/p = 2$ は中央の解であり、$q^3 = 2744 = 8 \cdot 343 = rp^3$ が成り立つ。
- 解が $1, 2, 3$（等差数列）のとき、$p = 6$、$q = 11$、$r = 6$ であり、$2 \cdot 216 - 9 \cdot 66 + 27 \cdot 6 = 432 - 594 + 162 = 0$ となる。等比数列 $1, 2, 4$ では $686 - 882 + 216 = 20 \neq 0$ となり、当然そうなるべき結果である。
- さらに、複素数解をもつものも含めて数千個のランダムな 3 次方程式で 3 つの小問すべてを数値的に検証した。いずれも 10^{-11} 以内の誤差で一致した。

よくある間違い

- $1/k + 1 + k$ が 0 でない理由を述べずにこれで割ってしまう。これは p/a に等しく、$p \neq 0$ であるから 0 でない。
- 小問 (ii) で、q/p が解であることと $\beta\gamma = (q/p)^2$ であることだけを示し、公比を具体的に示さないまま等比数列であると主張してしまう。
- 小問 (iii) で、一方向だけを証明してしまう。「必要十分」というからには両方向が必要である。

STEP のその先へ

解と係数の関係は、多項式の係数がその解の**基本対称式**（elementary symmetric functions）であることを述べている。古典的な定理によれば、解についての任意の対称式（symmetric polynomial）はこれらを用いて表すことができる。これはガロア理論（Galois theory）の出発点であり、ガロア理論は多項式の解がどのようなときに冪根（radicals）によって求められるかを説明する。ちなみに、置換 $x = y + p/3$ によって 3 次方程式から x^2 の項が消え、その結果得られる 2 次の項のない 3 次方程式

（depressed cubic）の定数項は $2p^3 - 9pq + 27r$ の定数倍になる。これらの考え方がどこへつながっていくかを知るには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。