解答例

STEP II 1999、第 9 問

力学 ・ 変化する力による運動

> **STEP II 1999、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q9

鍵となる考え方

加速度（acceleration）は距離 x のみに依存し、時刻には依存しない。したがって用いるべき道具は $\ddot{x} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ である。これにより運動方程式（equation of motion）は、そのまま積分して v^2 を x の関数として求められる形になる（姿を変えたエネルギー方程式（energy equation）である）。あとはすべて、v^2 がどこで 0 になるかを問うことに尽きる。そこが破片（fragment）が止まって引き返す地点である。

解答

各破片を、定点 G を通る直線上を運動する質点（particle）としてモデル化し、x を G からの距離、$v = \dot{x}$ をその速度とする。速度は G から遠ざかる向きを正とする。初めは $x = 0$ かつ $v = u > 0$ である。加速度は G に向かう向きなので、この約束のもとでは負である。

小問 (i)

$x < R$ では $\ddot{x} = -k_1 x^3$ であり、$\ddot{x} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書くと

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -k_1 x^3.$$

変数分離（separation of variables）を行い、出発点（$x = 0$、$v = u$）から積分すると

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}u^2 = -\tfrac{1}{4}k_1 x^4, \qquad \text{よって} \qquad v^2 = u^2 - \tfrac{1}{2}k_1 x^4 \quad (x < R).$$

破片が外向きに動いている間は $v = \sqrt{u^2 - \tfrac{1}{2}k_1 x^4}$ である。

小問 (ii)

$2a^2 = k_1R^4$ とおくと、(i) の式は $v^2 = u^2 - a^2(x/R)^4$ となる。x が 0 から増加するにつれて v^2 は減少し、次の点で o に達する。

$$x_0 = \left(\frac{2u^2}{k_1}\right)^{1/4}.$$

$u < a$ ならば $2u^2 < 2a^2 = k_1R^4$ であるから、$x_0 < R$ である。

考えてみよう x_0 で速さは o になるが、それがなぜ破片がそれより先へ進まないことを意味するのだろうか？

x_0 において破片は瞬間的に静止するが、そこでの加速度は $-k_1x_0^3 \neq 0$ であり、G の向きを向いている。したがって釣り合い（equilibrium）の状態にはなく、G に向かって引き返し始める。実際、x が x_0 を超えることは決してない。もし超えれば、(i) の式から $v^2 < 0$ となってしまうからである。破片が到達する最も遠い点は $x_0 < R$ であり、したがって破片が G から距離 R に達することはない。これで示された。

小問 (iii)

まず、$u \geq b$ である破片は確かに R に到達する。定義から

$$b^2 = \tfrac{1}{2}k_1R^4 + \frac{2k_2}{3R^3} = a^2 + \frac{2k_2}{3R^3} > a^2,$$

であるから、$x \leq R$ に対して小問 (i) より

$$v^2 = u^2 - \tfrac{1}{2}k_1x^4 \geq u^2 - a^2 \geq b^2 - a^2 = \frac{2k_2}{3R^3} > 0.$$

特に、破片は $v_R^2 = u^2 - \frac{1}{2}k_1R^4 = u^2 - a^2$ で $x = R$ に到達する。

$x \geq R$ では運動方程式は $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -k_2x^{-4}$ である。$x = R$ から積分すると

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_R^2 = \frac{k_2}{3}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{R^3}\right),$$

よって

$$\begin{aligned} v^2 &= u^2 - \tfrac{1}{2}k_1R^4 - \frac{2k_2}{3R^3} + \frac{2k_2}{3x^3} \\ &= u^2 - b^2 + \frac{2k_2}{3x^3} \qquad (x \geq R). \end{aligned}$$

b がこのように定義されていたのは、まさにこの組合せのためである。b^2 は、G から無限遠へ脱出するのに $\frac{1}{2}v^2$ で測って必要な「費用」の総額なのである。

$u \geq b$ ならば $u^2 - b^2 \geq 0$ かつ $\frac{2k_2}{3x^3} > 0$ であるから、すべての $x \geq R$ に対して $v^2 > 0$ である（これは境界の場合 $u = b$ も含む）。$x \leq R$ での評価と合わせると、破片が到達しうるあらゆる距離で v^2 は真に正である。

速度 v は時間について連続であり、$u > 0$ から始まる。負になるためには 0 を通過しなければならず、そのためにはある位置で $v^2 = 0$ となる必要があるが、それが決して起こらないことをいま示した。したがって $v > 0$ が常に成り立つ。すなわち、爆発の瞬間から破片は常に G から遠ざかる向きに動いている。（$v^2 \geq 2k_2/(3x^3)$ であるから、破片は進み続け、$x \to \infty$ となる。）

小問 (iv)

今度は $a < u < b$ とする。$u > a$ であるから、(iii) の議論により $[0, R]$ 上で $v^2 \geq u^2 - a^2 > 0$ であり、破片は外向きに動いたまま R に到達する。R より先では

$$v^2 = \frac{2k_2}{3x^3} - (b^2 - u^2),$$

であり、今度は $b^2 - u^2 > 0$ である。これは x の増加とともに減少し、次のとき o となる。

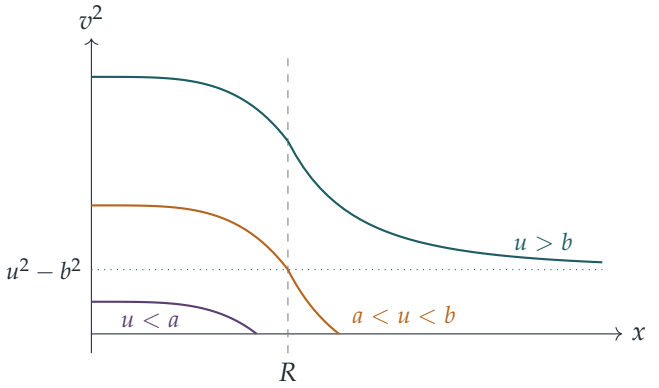
$$x^3 = \frac{2k_2}{3(b^2 - u^2)}.$$

この点は確かに領域 $x \geq R$ にある。実際、$u > a$ より $b^2 - u^2 < b^2 - a^2 = \frac{2k_2}{3R^3}$ であるから、$x^3 > R^3$ となる。(ii) と同様に、破片はそこで G に向かう o でない加速度 $-k_2 x^{-4}$ をもって止まり、それより先へは進めない。進めば v^2 が負になってしまうからである。G からの最大距離は

$$\boxed{x_{\max} = \left(\frac{2k_2}{3(b^2 - u^2)}\right)^{1/3}}$$

である。

下図は、$k_1 = 2$、$k_2 = 3$、$R = 1$（したがって $a^2 = 1$、$b^2 = 3$）の場合に、3 種類の初速について v^2 を x に対してプロットしたものである。各破片は、その曲線が横軸と交わるところまで進む。



検算

- $k_1 = 2$、$k_2 = 3$、$R = 1$ とすると $a = 1$、$b = \sqrt{3}$ である。$u = \sqrt{2}$ に対して公式は $x_{\max} = (2 \cdot 3/(3 \cdot 1))^{1/3} = 2^{1/3} \approx 1.26$ を与え、これは R をわずかに超えたところであり、そうなるべきである。
- $u \to a^+$ のとき $b^2 - u^2 \to 2k_2/(3R^3)$ であり、$x_{\max} \to R$ となる。$u \to b^-$ のとき $x_{\max} \to \infty$ となる。どちらも境界において小問 (ii) および (iii) と一致する。
- 運動を数値的に追跡すると（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）、k_1、k_2、R の無作為な選び方 12 通り）、v^2 の式、$u < a$ のときの折り返し点 $(2u^2/k_1)^{1/4}$、(iv) の $x_{\max}$ の値が誤差 0.1% 以内で再現され、$u \geq b$ のときには逆行はまったく起こらない。

よくある間違い

- 第 2 段階を、$v_R^2 = u^2 - \frac{1}{2}k_1 R^4$ として $x = R$ から積分するのではなく、$x = 0$ から積分してしまう。力の法則は R で変わるので、積分定数も変わる。
- 符号を落とす。加速度は G に向かうので、$v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ は $k_1 x^3$ または $k_2 x^{-4}$ の**マイナス**である。
- (iii) で $x \geq R$ だけを確かめ、R の内側でも v が正のままでなければならないことを忘れる。

STEP のその先へ

$V'(x)$ を加速度の符号を反転したものとすると、量 $\frac{1}{2}v^2 + V(x)$ は、位置のみに依存する任意の力について保存される（conserved）。V をプロットすると（「ポテンシャルの井戸（potential well）」）、どの運動が有界でどの運動が脱出するかが一目でわかり、b はこの井戸に対する脱出速度（escape speed）にほかならない。同じ推論により実際の重力における脱出速度が得られ、またこれは非線形振動子（nonlinear oscillator）の相平面解析（phase-plane analysis）の出発点でもある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、このようなエネルギー図が詳しく展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。