解答例

STEP II 1999、第 8 問

純粋数学 ・ 三角級数

> **STEP II 1999、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q8

鍵となる考え方

$\sin k\theta$ に $2\sin\frac{1}{2}\theta$ を掛けると、積和公式（product-to-sum formula）によって二つの余弦の差に変わり、和は隣り合う項が次々に打ち消し合う形（telescoping）になる。その後は、どちらの小問も θ をうまく選ぶことが要点である。$\theta = \pi/n$ とおくと、扱いにくい余弦 $\cos(n+\frac{1}{2})\theta$ は $\cos\frac{1}{2}\theta$ の単純な定数倍になる。(ii) では、半角の公式（half-angle formula）により $\sin^2$ が余弦に変わり、和 $\sum k\cos k\theta$ はちょうど $(*)$ を微分して得られるものである。

解答

$(*)$ の証明

右辺が意味をもつように、$\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$ と仮定する。恒等式（identity）$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ に $A = k\theta$、$B = \frac{1}{2}\theta$ を代入すると

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\sin k\theta = \cos\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\theta - \cos\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\theta.$$

を得る。これを $k=0$ から n まで加えると、第 k 行で引かれる $\cos(k+\frac{1}{2})\theta$ は第 $k+1$ 行で再び足されるので、最初と最後の項だけが残る。

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \cos\left(-\tfrac{1}{2}\theta\right) - \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta = \cos\tfrac{1}{2}\theta - \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta,$$

ここで余弦が偶関数（even function）であることを用いた。両辺を $2\sin\frac{1}{2}\theta$ で割れば $(*)$ が得られる。

小問 (i)

$\theta = \pi/n$（ただし $n \geq 1$）とおくと、$\sin\frac{1}{2}\theta = \sin\frac{\pi}{2n} \neq 0$ である。このとき

$$\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta = \cos\left(\pi + \tfrac{\pi}{2n}\right) = -\cos\tfrac{\pi}{2n},$$

であるから、$(*)$ の分子は $2\cos\frac{\pi}{2n}$ となり、

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}} = \cot\frac{\pi}{2n}.$$

となる。これは厳密な値である。n が大きいとき $\frac{\pi}{2n}$ は小さいので、$\cos\frac{\pi}{2n} \approx 1$、$\sin\frac{\pi}{2n} \approx \frac{\pi}{2n}$ であり、

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \approx \frac{1}{\pi/(2n)} = \frac{2n}{\pi}.$$

を得る。

小問 (ii)

倍角の公式（double-angle formula）より $\sin^2\frac{k\pi}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n}\right)$ であるから、$\theta = \pi/n$ として

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta = \frac{n(n+1)}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta. \qquad (1)$$

となる。$\sum k\cos k\theta$ を求めるために、$(*)$ を θ について微分する。左辺はちょうどこの和になる。まず右辺を

$$\frac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\theta - \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

と分ける。$S = \sin\frac{1}{2}\theta$、$c = \cos\frac{1}{2}\theta$ とおく。第 1 項を微分すると $-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}\theta = -\frac{1}{4S^2}$ となる。商の微分法（quotient rule）により、第 2 項を微分すると

$$\frac{(n+\frac{1}{2})\sin(n+\frac{1}{2})\theta \cdot 2S + \cos(n+\frac{1}{2})\theta \cdot c}{4S^2}.$$

となる。したがって

$$\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta = \frac{-1 + (2n+1)S\sin(n+\frac{1}{2})\theta + c\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{4S^2}.$$

である。

考えてみよう なぜ $\theta = \pi/n$ を代入するのは微分の**後**であって、前ではないのか。

恒等式 $(*)$ はすべての θ（ただし $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$）について成り立つので、微分してよい。先に $\theta = \pi/n$ と固定してしまうと、一つの数が得られるだけで、微分するものが何もなくなる。導関数を θ についての恒等式として得てしまえば、好きな値を代入できる。

ここで $\theta = \pi/n$ とする。(i) と同様に $(n+\frac{1}{2})\theta = \pi + \frac{1}{2}\theta$ であるから、$\sin(n+\frac{1}{2})\theta = -S$、$\cos(n+\frac{1}{2})\theta = -c$ である。よって

$$\sum_{k=0}^{n} k\cos\frac{k\pi}{n} = \frac{-1-(2n+1)S^2-c^2}{4S^2} = \frac{-2-2nS^2}{4S^2} = -\frac{1}{2S^2} - \frac{n}{2},$$

となる。ここで $c^2 = 1-S^2$ を用いた。これを (1) に代入すると

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{4} + \frac{1}{4S^2} = \frac{n(n+2)}{4} + \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{2n}}.$$

を得る。これは厳密な値である。n が大きいとき $\sin\frac{\pi}{2n} \approx \frac{\pi}{2n}$ であるから $\frac{1}{4\sin^2(\pi/2n)} \approx \frac{n^2}{\pi^2}$ であり、また $\frac{n(n+2)}{4} = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}$ の第 2 項は n^2 に比べて無視できる。したがって

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \approx \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\right)n^2,$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- (ii) で $n = 1$ のとき：和は $0 + 1\cdot\sin^2\frac{\pi}{2} = 1$ であり、厳密な公式は $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ を与える。
- (i) で $n = 2$ のとき：和は $0+1+0 = 1$ であり、$\cot\frac{\pi}{4} = 1$ である。
- 数値的には、$n = 1000$ のとき (i) の和は $636.6192\ldots$ で、$2n/\pi = 636.6198\ldots$ と比べられる。(ii) の和は $351\,821.3$ で、$(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2})n^2$ との差は 0.15% 以内である。(ii) の相対誤差（relative error）は、無視した $\frac{n}{2}$ の項のために $1/n$ のように小さくなっていく。

よくある間違い

- $\cos(\pi + x) = \cos x$ と書いてしまうこと。正しくは $-\cos x$ であり、この符号こそが (i) で分子を 2 倍にしている。
- (ii) で $\frac{1}{2}\sum k = \frac{n(n+1)}{4}$ の項を忘れること。この項が $\frac{1}{4}n^2$ をもたらす。

STEP のその先へ

小問 (i) は姿を変えたリーマン（Riemann）和（Riemann sum）である。$\frac{\pi}{n}\sum \sin\frac{k\pi}{n} \to \int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = 2$ であり、これはまさに $\sum \approx 2n/\pi$ という主張そのものである。同様に、(ii) は $\frac{1}{n^2}\sum k\sin^2\frac{k\pi}{2n} \to \int_0^1 x\sin^2\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}$ を述べている。同じ打ち消し合いの技法を $\sum\cos k\theta$ に適用すると、フーリエ解析（Fourier analysis）におけるディリクレ（Dirichlet）核（Dirichlet kernel）が得られる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、リーマン和とフーリエ級数（Fourier series）を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。