解答例

STEP II 1999、第 7 問

純粋数学 • 曲線の概形

> **STEP II 1999、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q7

鍵となる考え方

微分して全体を通分すると、分子はほとんど完全に消えてしまう。2 次の項はすべて打ち消し合い、1 次の因数がただ一つ残るので、停留点（stationary point）はただちに決まる。グラフの概形を描くには、根号の中を平方完成（complete the square）する。そうすると、曲線がどこに存在するか、$|x|$ が大きいときにどう振る舞うかがわかり、さらに $a = 1$ のときには平方根が絶対値（modulus）になって、曲線が 2 つの直角双曲線（rectangular hyperbola）の一部に分かれることもわかる。

解答

$Q(x) = x^2 - 2x + a = (x-1)^2 + (a-1)$ とおく。

$a > 1$ のとき停留点はちょうど 1 つである

$a > 1$ ならば、すべての x について $Q(x) \geq a - 1 > 0$ であるから、曲線はすべての実数 x で定義され、しかも微分可能である。$y = xQ^{-1/2}$、$Q'(x) = 2x - 2$ であるから、積の微分法（product rule）により

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= Q^{-1/2} - \tfrac{1}{2}x(2x-2)Q^{-3/2} = \frac{Q - x(x-1)}{Q^{3/2}} \\ &= \frac{x^2 - 2x + a - x^2 + x}{Q^{3/2}} = \frac{a - x}{(x^2 - 2x + a)^{3/2}}.\end{aligned}$$

分母はすべての x で正かつ有限であるから、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ となるのは $x = a$ のときに限る。したがって C の停留点はちょうど 1 つであり、それは

$$x = a, \qquad y = \frac{a}{\sqrt{a^2 - a}} = \sqrt{\frac{a}{a-1}},$$

の点である。これが示すべきことであった。$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ の符号は $a - x$ の符号と一致するので、曲線は $x < a$ で増加し、$x > a$ で減少する。よってこの点は極大点（maximum）である。

考えてみよう $a > 1$ はどこで使われたか。

2 か所である。第一に、$a > 1$ により至るところで $Q > 0$ となるので、曲線に途切れはなく、導関数が存在しない点もない。第二に、$Q(a) = a^2 - a > 0$ であるから、$x = a$ は確かに曲線上の点になる。$a = 1$ のときは、停留点の候補 $x = a = 1$ がちょうど $Q = 0$ となる点であり、これが小問 (ii) で問題となる点である。

さらに 2 つの事実が、どちらの概形を描くのにも役立つ。$|x|$ が大きいとき $\sqrt{Q} = |x|\sqrt{1 - 2/x + a/x^2} \approx |x|$ であるから、

$$y \to 1 \text{、ただし} x \to +\infty, \qquad y \to -1 \text{、ただし} x \to -\infty.$$

となる。また、y の符号は x の符号と一致し、曲線は原点を傾き $a/a^{3/2} = 1/\sqrt{a}$ で通る。

小問 (i)：$a = 2$

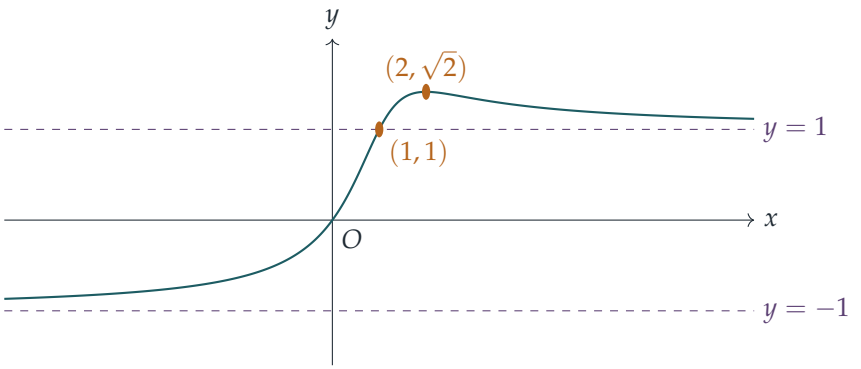
このとき $y = \dfrac{x}{\sqrt{(x-1)^2 + 1}}$ であり、すべての x で定義され、次のことが成り立つ。

- $(2, \sqrt{2})$ で極大となり、$x < 2$ で増加、$x > 2$ で減少する。
- 原点を通り、そこでの傾きは $1/\sqrt{2}$ である。
- 水平な漸近線（asymptote）$y = 1$（$x \to \infty$ のとき）と $y = -1$（$x \to -\infty$ のとき）をもつ。

曲線はそれぞれの漸近線のどちら側にあるだろうか。$y = \pm 1$ とおいて両辺を 2 乗すると $x^2 = x^2 - 2x + 2$ となり、$x = 1$ を得る。y の符号は x の符号と一致するので、適するのは $y = +1$ だけである。したがって曲線は $y = 1$ とただ 1 回、$(1, 1)$ で交わる。すべての $x > 1$ で曲線は $y = 1$ より上にあり、極大点を過ぎたあと上側から漸近線に近づいていく。一方、曲線は $y = -1$ とは交わらないので、常に $y = -1$ より上にあり、x が $-\infty$ から増加するにつれて $y = -1$ から離れて上昇していく。

（さらに詳しく調べたければ、もう一度微分すると $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = (2x^2 - 7x + 4)/Q^{5/2}$ となるので、$x = \frac{1}{4}(7 \pm \sqrt{17})$、すなわちおよそ $x \approx 0.72$ と $x \approx 2.78$ に変曲点（point of

inflection）がある。概形を描くのにこれらは必要ないが、グラフの形の理由を説明してくれる。）



小問 (ii)： $a = 1$

このとき $Q = (x-1)^2$ であるから $x = 1$ は除かれる。また、平方根は正の方をとるので

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|.$$

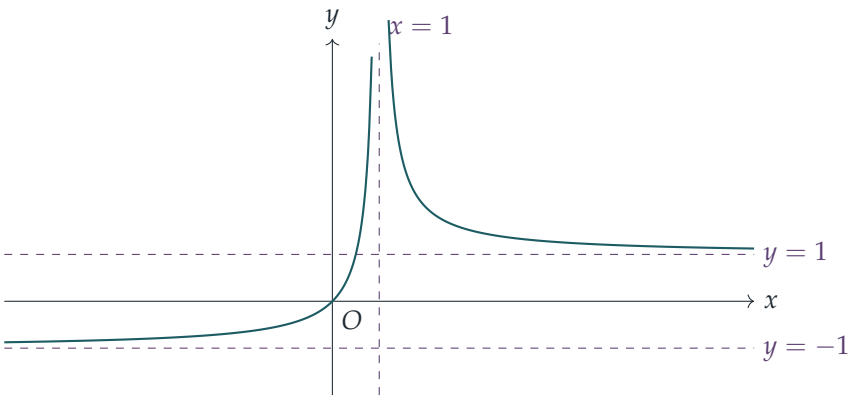
である。よって

$$y = \frac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} = -1 + \dfrac{1}{1-x}, & x < 1, \\ \dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

それぞれの枝は、$x = 1$ を中心とする直角双曲線の一部である。

- $x < 1$ のとき：y は増加する（導関数は $1/(1-x)^2 > 0$）。-1（$x \to -\infty$ のとき上側から近づく）から出発し、原点を傾き 1 で通過して、$x \to 1^-$ のとき $+\infty$ に発散する。
- $x > 1$ のとき：y は減少する（導関数は $-1/(x-1)^2 < 0$）。$x \to 1^+$ のとき $+\infty$ であり、そこから 1 に向かって下がっていく（$x \to \infty$ のとき上側から近づく）。

直線 $x = 1$ は鉛直な漸近線であり、その**両側**で $y \to +\infty$ となる（分子は 1 に近く、分母は小さな正の数である）。停留点は存在しない。$a > 1$ の曲線がもっていた高さ $\sqrt{a/(a-1)}$ の極大点は、$a \to 1^+$ のとき無限遠へ押しやられてしまったのである。一般の公式もこれと合致する。実際、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (1-x)/|x-1|^3$ は決して 0 にならない。



検算

- 数値的に、導関数の公式 $(a-x)/Q^{3/2}$ は数千個の無作為な点で差分（finite difference）による導関数と一致し、$a > 1$ のいくつかの値について符号を走査すると、符号の変化はちょうど 1 回だけ見つかる。
- $a = 2$ のとき：$y(2) = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2} \approx 1.414$、$y(1) = 1$ であり、$y(10^6) \approx 1.000001$、$y(-10^6) \approx -0.999999$ となる。これにより、漸近線にどちら側から近づくかが確認できる。
- $a = 1$ のとき：$y(0.999) \approx 999$、$y(1.001) \approx 1001$ であり、主張どおりどちらも大きな正の数である。
- $a \to \infty$ のとき、極大値 $\sqrt{a/(a-1)}$ は 1 に近づく。これは妥当である。a が非常に大きいと、原点付近で曲線はほぼ $x/\sqrt{a}$ となり、山は平たくなる。

よくある間違い

- 小問 (ii) で $\sqrt{(x-1)^2} = x-1$ と書いてしまうこと。そうすると至るところで $y = x/(x-1)$ となり、左側の枝を誤る。その誤った枝は $x \to -\infty$ のとき $+1$ に近づき、$x \to 1^-$ のとき $-\infty$ に発散することになってしまう。
- 曲線の両端に漸近線 $y = 1$ を与えてしまうこと。$\sqrt{x^2} = |x|$ であるから、$x \to -\infty$ のときの極限は -1 である。
- $a > 1$ のとき分母が決して 0 にならないことを示し忘れること。それがなければ、「分子が 0 になるのは $x = a$ のときだけである」と言っても、停留点がちょうど 1 つであることの証明にはまだならない。

STEP のその先へ

ここで扱った曲線の族は、$a = 1$ を境に突然その性質を変える。極大点を 1 つもつ滑らかな曲線が、鉛直な漸近線をもつ 2 つの離れた枝に変わるのである。曲線の族の定性的な形がパラメータにどう依存するかを調べることは、分岐理論（bifurcation theory）の出発点である。また、$\sqrt{x^2} = |x|$ や $x \to \pm\infty$ のときの極限に払う注意は、まさに大学 1 年の解析学で厳密に扱われる注意そのものである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、極限や連続性がきちんと扱われる様子を見るのに親しみやすい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。