解答例

STEP II 1999、第 6 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP II 1999、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q6

鍵となる考え方

分数式 $\frac{ax+b}{cx+d}$ の導関数（derivative）は、定数を $(cx+d)^2$ で割った形になる。したがって、被積分関数（integrand）が $\frac{1}{(x+3)^2}$ と $\frac{x+1}{x+3}$ または $\frac{x+2}{x+3}$ の関数との積になっているときは、その分数式を新しい変数として置換すれば $\frac{1}{(x+3)^2}$ は完全に吸収され、残るのはせいぜい $\int \ln y \, \mathrm{d}y$ である。残りの 2 つの積分は、対数法則から導かれる。

解答

導関数

商の微分法（quotient rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

分子の x の項は打ち消し合い、定数が残る。これこそが、この問題全体を成り立たせている点である。

1 つ目の積分

$y = \dfrac{x+1}{x+3}$ とおく。これは $a=1$、$b=1$、$c=1$、$d=3$ とした $(*)$ の形であるから、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3-1}{(x+3)^2} = \frac{2}{(x+3)^2}, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}y.$$

$x=0$ のとき $y=\frac{1}{3}$、$x=1$ のとき $y=\frac{1}{2}$ である。$\int \ln y\,\mathrm{d}y = y\ln y - y$（$u=\ln y$ とする部分積分（integration by parts））を用いると、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{1/3}^{1/2}\ln y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\Big[y\ln y - y\Big]_{1/3}^{1/2}\\ &= \frac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\ln 3 + \tfrac{1}{3}\right)\\ &= \frac{1}{6}\ln 3 - \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{12},\end{aligned}$$

ただし $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$ と $\ln\frac{1}{3} = -\ln 3$ を用いた。これが求める結果である。この積分を I_1 とよぶ。

対になる積分

> **考えてみよう** x^2+3x+2 は、いま用いた置換とどのような関係があるだろうか。

これは $(x+1)(x+2)$ と因数分解できるので、

$$\frac{x^2+3x+2}{(x+3)^2} = \frac{x+1}{x+3}\cdot\frac{x+2}{x+3} \qquad \text{かつ} \qquad \frac{x+1}{x+2} = \frac{x+1}{x+3}\Big/\frac{x+2}{x+3}.$$

したがって、残りの2つの積分に現れる対数はすべて、$\ln\frac{x+1}{x+3}$ と $\ln\frac{x+2}{x+3}$ の和と差で表される（$0\le x\le 1$ においてこれらの分数はすべて正である）。よって、もう1つ次の積分が必要になる。

$$J = \int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)\mathrm{d}x.$$

$y = \dfrac{x+2}{x+3}$ とおく。今度は $a=1$、$b=2$、$c=1$、$d=3$ であるから $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{(x+3)^2}$ となり、積分区間は $y=\frac{2}{3}$ から $y=\frac{3}{4}$ になる。

$$\begin{aligned}J &= \int_{2/3}^{3/4}\ln y\,\mathrm{d}y = \Big[y\ln y - y\Big]_{2/3}^{3/4}\\ &= \tfrac{3}{4}(\ln 3 - 2\ln 2) - \tfrac{3}{4} - \tfrac{2}{3}(\ln 2 - \ln 3) + \tfrac{2}{3}\\ &= \frac{17}{12}\ln 3 - \frac{13}{6}\ln 2 - \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

残りの2つの積分

$\ln\frac{x^2+3x+2}{(x+3)^2} = \ln\frac{x+1}{x+3} + \ln\frac{x+2}{x+3}$ であるから、2つ目の積分は

$$\begin{aligned}I_1 + J &= \left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{17}{12}\right)\ln 3 - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{13}{6}\right)\ln 2 - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{12}\\ &= \frac{19}{12}\ln 3 - \frac{29}{12}\ln 2 - \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

$\ln\frac{x+1}{x+2} = \ln\frac{x+1}{x+3} - \ln\frac{x+2}{x+3}$ であるから、3 つ目の積分は

$$\begin{aligned} I_1 - J &= \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{17}{12}\right)\ln 3 - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{13}{6}\right)\ln 2 \\ &= \frac{23}{12}\ln 2 - \frac{5}{4}\ln 3, \end{aligned}$$

となる。ここで定数項 $-\frac{1}{12}$ は打ち消し合っている。

検算

- $[0,1]$ でシンプソンの公式（Simpson's rule）を用いると $I_1 \approx -0.07352$、$J \approx -0.02878$ となり、2 つ目と 3 つ目の積分は ≈ -0.10230 と -0.04473 となる。いずれも厳密な値と小数第 10 位まで一致する。
- 大まかな評価：$\int_0^1 (x+3)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}$ であり、$\ln\frac{x+1}{x+2}$ は $\ln\frac{1}{2} \approx -0.69$ と $\ln\frac{2}{3} \approx -0.41$ の間にある。よって 3 つ目の積分はおよそ -0.058 と -0.034 の間になければならず、実際 -0.0447 はその間にある。
- $[0,1]$ においてどの被積分関数も負である（対数の中の分数はいずれも 1 より小さい）から、3 つの答えはすべて負になるはずであり、実際そうなっている。

よくある間違い

- 1 つ目の置換で係数 $\frac{1}{2}$ を忘れること。そこでは $ad - bc = 2$ であるが、2 つ目では 1 である。
- 積分区間を変えないこと、すなわち置換した後も x の区間 0 と 1 のままにしてしまうこと。
- $\frac{x+1}{x+2}$ に対して新たな置換を試みること。それでもうまくいくが、$(x+3)^{-2}$ を y で表すと煩雑な式になる。対数を分解するほうがはるかに速い。

STEP のその先へ

$ad - bc \neq 0$ を満たす $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ の形の写像は**メビウス変換**（Möbius transformations）とよばれる。2 つのメビウス変換の合成は 2×2 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の積に対応し、$ad - bc$ はその行列式（determinant）である。これが導関数に $ad - bc$ が現れる理由である。複素解析（complex analysis）において、メビウス変換はちょうど拡張された複素平面（extended plane）の等角な全単射（conformal bijections）であり、円と直線を円と直

線に移す。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）には、メビウス変換についての見事な章がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。