解答例

STEP II 1999、第 5 問

純粋数学 ・ 三角方程式

> **STEP II 1999、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q5

鍵となる考え方

自然な方針は二つある。一つは $\cos\alpha$ を未知数とする方法である。$\sin\alpha$ を一方の辺に分離して両辺を 2 乗し、$\sin^2 + \cos^2 = 1$ を用いると、$\cos\alpha$ についての二次方程式（quadratic equation）が得られる。もう一つは、$5\cos x + 12\sin x$ を一つの余弦 $13\cos(x-\beta)$ にまとめる方法であり（三角関数の合成）、これによって二次方程式の二つの解がどちらも実際に現れることもわかる。最後の部分については、余弦は $[0,\pi]$ で減少（decreasing）するので、$\alpha < \frac{3}{4}\pi$ は $\cos\alpha$ についての主張に言い換えられる。したがって、問題は二つの無理数（surd）の大小比較に帰着する。

解答

$\cos\alpha$ の二つの値

$c = \cos\alpha$ とおく。与えられた方程式から $12\sin\alpha = 7 - 5c$ である。両辺を 2 乗し、$\sin^2\alpha = 1 - c^2$ を用いると、

$$144(1-c^2) = 49 - 70c + 25c^2,$$
$$169c^2 - 70c - 95 = 0.$$

解の公式（quadratic formula）により、

$$c = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 + 4\cdot 169\cdot 95}}{2\cdot 169} = \frac{70 \pm \sqrt{69120}}{338}.$$

$69120 = 576\times 120 = 24^2\times 120$ であるから、$\sqrt{69120} = 24\sqrt{120}$ である。よって

$$\cos\alpha = \frac{35 - 12\sqrt{120}}{169} \qquad \text{または} \qquad \cos\alpha = \frac{35 + 12\sqrt{120}}{169},$$

となり、これが求める結果である。もう一方の値は $\dfrac{35+12\sqrt{120}}{169}$ である。

> **考えてみよう** 2乗すると、偽の解が紛れ込むことがある。二つの値は、どちらも本当に元の方程式の解から得られるのだろうか。

どちらも実際に得られる。その理由は、一つの余弦にまとめた形を見るとわかる。$\cos\beta = \frac{5}{13}$、$\sin\beta = \frac{12}{13}$ を満たす鋭角（acute angle）を β とする。すると

$$5\cos x + 12\sin x = 13\cos(x-\beta),$$

であるから、方程式は $\cos(x-\beta) = \frac{7}{13}$ と同値である。$\cos\gamma = \frac{7}{13}$ を満たす鋭角を γ とすると、$\sin\gamma = \frac{\sqrt{169-49}}{13} = \frac{\sqrt{120}}{13}$ である。解は $x = \beta \pm \gamma + 2k\pi$ であり、

$$\cos(\beta\pm\gamma) = \cos\beta\cos\gamma \mp \sin\beta\sin\gamma = \frac{35\mp 12\sqrt{120}}{169}.$$

したがって、どちらの符号も本物の解を与える。$\alpha = \beta+\gamma$ がマイナスの符号に、$\alpha = \beta-\gamma$ がプラスの符号に対応する。

第2象限にある解

$\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi$ と仮定する。このとき $\cos\alpha < 0$ である。$\sqrt{120} > 10$ より $35+12\sqrt{120} > 0$ であるから、この解は除外される。また $12\sqrt{120} > 120 > 35$ であるから、もう一方の解は負である。よって

$$\cos\alpha = \frac{35-12\sqrt{120}}{169}.$$

余弦は $[0,\pi]$ で狭義単調減少である。α と $\frac{3}{4}\pi$ はどちらもこの区間に含まれるので、

$$\alpha < \tfrac{3}{4}\pi \iff \cos\alpha > \cos\tfrac{3}{4}\pi = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

したがって、$\dfrac{12\sqrt{120}-35}{169} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$、すなわち $12\sqrt{120}-35 < \dfrac{169}{\sqrt{2}}$ を示せばよい。

> **考えてみよう** 電卓を使わずに、また負かもしれない量を2乗することなく、これらの無理数をどう比較すればよいだろうか。

まず $\sqrt{120}$ を大まかに上から評価する。$120 < 121$ より $\sqrt{120} < 11$ であるから、

$$12\sqrt{120} - 35 < 132 - 35 = 97.$$

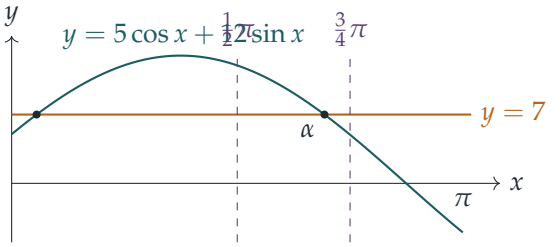
あとは $97 < \dfrac{169}{\sqrt{2}}$、すなわち $97\sqrt{2} < 169$ を示せば十分である。両辺はともに正なので、これは両辺の2乗についての不等式（inequality）と同値である：

$$2\times 97^2 = 18\,818 < 28\,561 = 169^2,$$

これは正しい。以上をまとめると、

$$\cos\alpha = -\frac{12\sqrt{120}-35}{169} > -\frac{97}{169} > -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\tfrac{3}{4}\pi,$$

であり、余弦は $[0,\pi]$ で減少するから、$\alpha < \frac{3}{4}\pi$ が示された。



検算

- 数値的には、$[0,2\pi)$ における解は $x \approx 0.1738$ と $x \approx 2.1782$ である。それぞれの余弦は 0.98493 と -0.57073 であり、$(35 \pm 12\sqrt{120})/169$ と一致する。
- 第 2 象限の解は 2.1782 であり、グラフからもわかるように $\frac{3}{4}\pi \approx 2.3562$ より小さい。余裕は十分にある：$\cos\alpha \approx -0.571$ に対して $-1/\sqrt{2} \approx -0.707$ である。大まかな評価 $\sqrt{120} < 11$ で足りるのはこのためである。
- 二次方程式の確認として、二つの解の積は $-\frac{95}{169}$、和は $\frac{70}{169}$ である。

よくある間違い

- 符号を確かめずに不等式を 2 乗してしまう。ここでは $12\sqrt{120}-35$ と $169/\sqrt{2}$ はどちらも正であるが、その理由は明記すべきである。
- 余弦が $[0,\pi]$ で**減少する**ために不等号の向きが逆になることを忘れる：$\alpha < \frac{3}{4}\pi$ は $\cos\alpha > -\frac{1}{\sqrt{2}}$ に対応する。
- 第 2 象限において正の解が除外される理由を説明しない。

STEP のその先へ

最後の部分は、厳密な評価（rigorous estimation）の小さな練習問題である。扱いにくい量をより簡単な上界で置き換え、それでも余裕が残ることを確かめる。これは解析学（analysis）における多くの不等式の証明の進め方そのものである。余弦の値から角

へと移る段階では、狭義単調（strictly monotonic）な関数は大小関係を保つ（あるいは逆転させる）という事実を用いている。これは、解析学の最初の講義で学ぶ逆関数（inverse function）の背後にある考え方である。不等式を用いた丁寧な証明についてさらに知りたければ、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。