解答例

STEP II 1999、第 4 問

純粋数学 ・ 二項係数の恒等式

STEP II 1999、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s2-q4

鍵となる考え方

二つの多項式が恒等的に等しい（identically equal）とき、x の各べきの係数（coefficient）は一致する。そこで、x^n の係数が求めたい和になるような二つの二項展開（binomial expansion）の積を選び、同じ係数をその積のより簡単な形から計算する。本当に選ぶべきなのは、どの二つの因数を掛け合わせるかということだけである。一方の因数で x を $-x$ に置き換えると (i) の符号が現れ、一方の因数を微分すると (ii) の余分な t が現れる。

解答

最初の結果

二項定理（binomial theorem）により、

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r.$$

これを二つ掛け合わせる。x^n の項は、$0 \le s \le n$ を満たすある s について、一つ目の括弧から x^s を、二つ目の括弧から x^{n-s} を取ることで得られる。よって $(1+x)^n(1+x)^n$ における x^n の係数は

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}\binom{n}{n-s} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}^2,$$

である。ここで、階乗による式から明らかな対称性 $\binom{n}{n-s} = \binom{n}{s}$ を用いた。恒等式（identity）のもう一方の辺では、$(1+x)^{2n}$ における x^n の係数は $\binom{2n}{n}$ である。二つの

多項式は恒等的に等しいので、x^n の係数は等しい：

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}^2 = \binom{2n}{n}.$$

小問 (i)

符号が交互に変わる必要があるので、一つ目の因数を $(1-x)^n = \sum_r \binom{n}{r}(-1)^r x^r$ に置き換え、恒等式

$$(1-x)^n(1+x)^n \equiv (1-x^2)^n.$$

を用いる。先ほどと同様に、左辺の x^n の項は一つ目の括弧の x^s と二つ目の括弧の x^{n-s} から得られるので、x^n の係数は

$$\sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s}\binom{n}{n-s} = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s}^2.$$

である。右辺の

$$(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k x^{2k}$$

は x の偶数乗のみを含む。n は偶数なので、x^n は確かに現れる。それは $2k = n$、すなわち $k = n/2$ のときであり、その係数は $(-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}$ である。係数を比較して、

$$\sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s}^2 = (-1)^{n/2}\binom{n}{n/2},$$

となり、示すべき式が得られた。（同じ議論により、n が奇数のときはこの和が 0 となることもわかる。そのとき $(1-x^2)^n$ には x^n の項がないからである。）

小問 (ii)

> **考えてみよう** $\binom{n}{t}$ の隣に因数 t を出現させるにはどうすればよいか？

微分（differentiation）がそれを実現する：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^t = t\,x^{t-1}$。二項展開を微分すると

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{t=1}^{n} t\binom{n}{t}x^{t-1}.$$

が得られる。これに $(1+x)^n = \sum_u \binom{n}{u}x^u$ を掛け、恒等式

$$n(1+x)^{n-1}(1+x)^n \equiv n(1+x)^{2n-1}.$$

を用いる。左辺において、x^{n-1} の項は一つ目の括弧の $t\binom{n}{t}x^{t-1}$ と二つ目の括弧の $\binom{n}{n-t}x^{n-t}$ の積から得られるので、x^{n-1} の係数は

$$\sum_{t=1}^{n} t\binom{n}{t}\binom{n}{n-t} = \sum_{t=1}^{n} t\binom{n}{t}^2.$$

である。右辺では、$n(1+x)^{2n-1}$ における x^{n-1} の係数は $n\binom{2n-1}{n-1}$ である。最後に、

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{2n}{n}\cdot\frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!} = 2\binom{2n-1}{n-1},$$

であるから、係数を比較して 2 倍すると、

$$\sum_{t=1}^{n} 2t\binom{n}{t}^2 = 2n\binom{2n-1}{n-1} = n\binom{2n}{n}.$$

別解：対称性を用いた鮮やかな議論がある。t を $n-t$ に置き換え、$\binom{n}{n-t} = \binom{n}{t}$ を用いると、$\sum_{t=0}^{n} t\binom{n}{t}^2 = \sum_{t=0}^{n}(n-t)\binom{n}{t}^2$ がわかる。同じ和に対するこの二つの表示を足し合わせると、最初の結果により

$$\sum_{t=0}^{n} 2t\binom{n}{t}^2 = n\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}^2 = n\binom{2n}{n}$$

が得られ、$t=0$ の項は 0 である。

検算

$n=4$ をとる。このときパスカルの三角形（Pascal's triangle）の行は $1,4,6,4,1$ である。すると $1+16+36+16+1 = 70 = \binom{8}{4}$ であり、交代和は $1-16+36-16+1 = 6 = (-1)^2\binom{4}{2}$、さらに $2(1\cdot 16 + 2\cdot 36 + 3\cdot 16 + 4\cdot 1) = 280 = 4\times 70$ である。また、39 以下のすべての n について、三つの恒等式がすべて正確に成り立つことも確かめた。

よくある間違い

- 小問 (i) で右辺が偶数乗のみを含むことを忘れること。n が偶数であることこそが、x^n を出現させるのである。
- 小問 (ii) で比較するべきを間違えること。微分すると指数が一つ下がるので、必要なのは x^n ではなく x^{n-1} である。

STEP のその先へ

最初の恒等式はヴァンデルモンドの恒等式（Vandermonde's identity）$\sum_s \binom{m}{s}\binom{n}{k-s} = \binom{m+n}{k}$ の特別な場合であり、これには数え上げによる証明もある：m 人の女性と n 人の男性から k 人を選ぶとき、女性を何人選ぶかで場合分けすればよい。多項式を数列の記録装置として用いるのは**母関数**（generating functions）の方法であり、組合せ論（combinatorics）や確率論における中心的な道具である。Grimmett と Welsh による

Probability: An Introduction（確率論入門）は全編を通して母関数を用いており、Siklos による *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）にはこの種の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。