解答例

STEP II 1999、第 3 問

純粋数学 • 数学的帰納法

> **STEP II 1999、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q3

鍵となる考え方

e^{-x^3} を毎回一から何度も微分してはいけない。そうではなく、第 n 次導関数（nth derivative）を $\mathrm{e}^{-x^3}S_n(x)$ と書き、それをもう一度微分するのである。こうすると S_{n+1} を S_n と S_n' に結びつける漸化式（recurrence）が得られ、問題のすべての部分がこの一つの関係式から導かれる。すなわち、具体的な多項式、帰納法、次数と最高次の係数、そして最後の不等式である。

解答

漸化式

定義により、

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^3}) = \mathrm{e}^{-x^3}S_n(x).$$

積の微分法（product rule）を用いてもう一度微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(\mathrm{e}^{-x^3}) = \mathrm{e}^{-x^3}S_n'(x) - 3x^2\mathrm{e}^{-x^3}S_n(x),$$

となり、両辺に e^{x^3} を掛けると

$$\boxed{S_{n+1}(x) = S_n'(x) - 3x^2S_n(x).}$$

を得る。これはすべての $n \geq 0$ で成り立つ。ここで $S_0(x) = 1$ である（第 0 次導関数は関数そのものである）。

S_2 と S_3

$S_0 = 1$ から、漸化式により $S_1 = 0 - 3x^2 = -3x^2$ となる。これは直接確かめることもできる。次に

$$S_2 = S_1' - 3x^2 S_1 = -6x - 3x^2(-3x^2) = 9x^4 - 6x,$$

となり、求める結果が得られた。もう一度漸化式を用いると、

$$\begin{aligned} S_3 &= S_2' - 3x^2 S_2 = (36x^3 - 6) - 3x^2(9x^4 - 6x) \\ &= 36x^3 - 6 - 27x^6 + 18x^3, \end{aligned}$$

であるから、

$$S_3(x) = -27x^6 + 54x^3 - 6.$$

帰納法

より強い主張を証明する。そうしても余分な手間はかからず、次の問いにも同時に答えられるからである。

$P(n)$：$S_n(x)$ は次数 $2n$ の多項式であり、その最高次の係数は $(-3)^n$ である。

初期段階。 $S_1(x) = -3x^2$ は次数 2、最高次の係数は $-3 = (-3)^1$ であるから、$P(1)$ は成り立つ。（$S_0 = 1$ であるから、$P(0)$ も成り立つ。）

帰納段階。 $P(k)$ が成り立つと仮定する。すなわち

$$S_k(x) = (-3)^k x^{2k} + (\text{次の値より低い次数の項：} 2k).$$

多項式の導関数は多項式であり、$3x^2 S_k$ も多項式であるから、$S_{k+1} = S_k' - 3x^2 S_k$ は多項式である。その次数（degree）を調べるため、二つの部分を別々に見る。

- S_k' の次数は高々 $2k - 1$ である。
- $-3x^2 S_k(x) = -3(-3)^k x^{2k+2} + (\text{低次の項}) = (-3)^{k+1} x^{2k+2} + \cdots$.

> **考えてみよう** S_k' が $-3x^2 S_k$ の最高次の項を打ち消すことはあり得るだろうか？

あり得ない。S_k' の次数は高々 $2k - 1$ であり、$2k + 2$ よりずっと小さいので、x^{2k+2} の項には影響しない。したがって S_{k+1} の次数はちょうど $2k + 2 = 2(k + 1)$ であり、最高次の係数（leading coefficient）は $(-3)^{k+1}$（0 でない）である。これが $P(k + 1)$ である。

数学的帰納法（induction）により、すべての $n \geq 1$ について $P(n)$ が成り立つ。よって $S_n(x)$ は次数 $2n$ の多項式（polynomial）であり、x^{2n} の係数は $(-3)^n$ である。これは S_2（$9 = (-3)^2$、次数 4）および S_3（$-27 = (-3)^3$、次数 6）と一致する。

最後の部分

$S_n'(a) = 0$ と仮定する。漸化式に $x = a$ を代入すると、導関数の項が消える。

$$S_{n+1}(a) = S_n'(a) - 3a^2 S_n(a) = -3a^2 S_n(a).$$

したがって

$$S_n(a)\, S_{n+1}(a) = -3a^2 \big(S_n(a)\big)^2 \leq 0,$$

である。$a^2 \geq 0$ かつ $\big(S_n(a)\big)^2 \geq 0$ だからである。等号が成り立つのは、$a = 0$ または $S_n(a) = 0$ のとき、かつそのときに限る。以上で証明が完了した。

検算

- 最高次の項：S_3 は $(-3)^3 x^6 = -27x^6$ で始まるはずであり、実際そうなっている。
- S_3 の定数項：$x = 0$ の近くで $\mathrm{e}^{-x^3} = 1 - x^3 + \cdots$ であるから、0 における第 3 次導関数は $-3! = -6$ である。これは $S_3(0) = -6$ と一致する。
- 停留点（stationary point）：$S_3'(x) = -162x^5 + 162x^2$ は $x = 1$ で 0 になる。そこで $S_3(1) = 21$、$S_4(1) = -3 \cdot 21 = -63$ であるから、積は $-1323 \leq 0$ となる。
- さらに、無作為に選んだ 30 個の有理数点 a において、$S_0, \ldots, S_9$ を $\mathrm{e}^{-(a+h)^3}$ の厳密なテイラー級数（Taylor series）と照合し、$[-4, 4]$ 内にある $S_1, \ldots, S_8$ のすべての停留点で不等式（inequality）を確かめた。

よくある間違い

- 次数がちょうど $2n + 2$ になる理由を述べ忘れること。最高次の係数が 0 でないこと、そして S_k' がそれを打ち消せないことが必要である。だからこそ、帰納法の仮定（inductive hypothesis）に最高次の係数を含めておくことが役に立つのである。
- 「S_n は多項式である」ことだけを証明し、次数はパターンから推測してしまうこと。問題は、次数を帰納法の議論そのものから導くよう求めている。

STEP のその先へ

ここで現れた多項式は、エルミート（Hermite）多項式（Hermite polynomials）の親戚である。エルミート多項式は e^{-x^2} に同じ技法を用いて定義される（「ロドリゲスの公式（Rodrigues formula）」）。エルミート多項式は今回のものと同様の漸化式を満たし、確率論や量子調和振動子（quantum harmonic oscillator）に登場する。最後の不等

式は、このような漸化式が、多項式の族全体について零点や極値点（turning points）の位置をどのように支配するかを垣間見せるものである。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）では、級数解（series solutions）の章でエルミートの方程式が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。