解答例

STEP II 1999、第 2 問

純粋数学 ・ 二次式の判別式

> **STEP II 1999、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q2

鍵となる考え方

すべては $(*)$ の判別式（discriminant）にかかっている。x の係数に因数 2 が含まれているので、判別式の 4 分の 1 である $\frac{1}{4}(b^2-4ac)$ がとりわけ簡潔な形になり、しかもそれは n の二次式（quadratic）になる。こうして各小問は、今度は n を変数とするもう一つの二次式の符号についての問題に帰着する。

解答

以下では常に $pn^2+q\geq 0$ を仮定する。これにより平方根は実数となり、$(*)$ は実数係数の通常の二次方程式になる（$q>0$ または $q\geq 0$ である小問 (i) と (iii) では、この条件は自動的に成り立つ）。$a=n$、$b=2\sqrt{pn^2+q}$、$c=rn+s$ とおくと、この方程式が実数解をもつのは $b^2-4ac\geq 0$ のとき、すなわち $\frac{1}{4}b^2-ac\geq 0$ のときであり、かつそのときに限る。ここで

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}b^2-ac &= (pn^2+q)-n(rn+s)\\ &= (p-r)n^2-sn+q.\end{aligned}$$

$f(n)=(p-r)n^2-sn+q$ とおく。すると

$$(*)\text{ は実数解をもたない}\iff f(n)<0.$$

小問 (i)

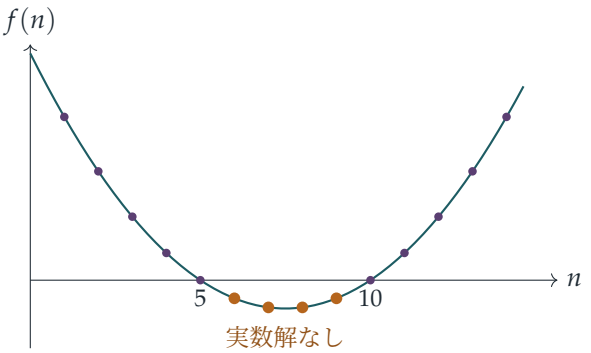
このとき $p-r=1$ であるから

$$f(n)=n^2-15n+50=(n-5)(n-10).$$

これが負になるのは $5 < n < 10$ のときであり、かつそのときに限る。n は正の整数なので、$(*)$ が実数解をもたないのはちょうど

$$n \in \{6, 7, 8, 9\}.$$

のときである。$n = 5$ と $n = 10$ では $f(n) = 0$ となり、実数の重解（repeated root）をもつので、これらの値は除かれる。



小問 (ii)

今度は $p < r$ であるから、f の最高次の係数（leading coefficient）$p - r$ は負である。f を実数変数 t の二次関数とみなす：

$$f(t) = (p - r)t^2 - st + q.$$

その判別式は

$$s^2 - 4(p - r)q,$$

であり、仮定 $4q(p - r) > s^2$ よりこれは負である。

考えてみよう f の判別式が負であることから、なぜ $f(n)$ の符号について何かがわかるのだろうか。

判別式が負の二次関数は実数の零点をもたないので、そのグラフは軸と交わらず、すべての実数 t に対して一定の符号を保つ。最高次の係数が負であればグラフは上に凸な放物線なので、その符号は負である。平方完成（completing the square）によって具体的に書けば

$$f(t) = (p - r)\left(t - \frac{s}{2(p - r)}\right)^2 + \frac{4q(p - r) - s^2}{4(p - r)},$$

となり、どちらの項も負または零である。第 1 項は $p - r < 0$ だからであり、第 2 項は分子が正で分母が負だからである。第 2 項は真に負なので、すべての実数 t に対して $f(t) < 0$ となる。

特に、すべての正の整数 n に対して $f(n) < 0$ であるから、$(*)$ はどの n の値に対しても実数解をもたない。これが示すべきことであった。

なお、仮定からは必然的に $q < 0$ が導かれることに注意しよう。$p - r < 0$ かつ $4q(p-r) > s^2 \geq 0$ であるから、q は負でなければならない。したがって n が小さいときには $pn^2 + q$ は実際に負になりうるので、平方根が実数であるという前提がここでは重要になる（虚数の係数を許すと $x = 0$ が解になりうる。$p = 1$、$r = 2$、$s = -2$、$q = -10$、$n = 1$ で試してみよ）。

小問 (iii)

今度は $n = 1$、$p - r = 1$、$q = s^2/8 \geq 0$ であるから $p + q > 0$ となり、係数は実数である。このとき

$$f(1) = 1 - s + \frac{s^2}{8} = \frac{s^2 - 8s + 8}{8}.$$

実数解をもつための必要十分条件は $f(1) \geq 0$、すなわち

$$s^2 - 8s + 8 \geq 0.$$

である。$s^2 - 8s + 8 = 0$ の解は

$$s = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 32}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{2},$$

であるから、$s^2 - 8s + 8 = \left(s - (4 - 2\sqrt{2})\right)\left(s - (4 + 2\sqrt{2})\right)$ となる。この積が非負になるのは、s が二つの解の間の開区間の外にあるときであり、かつそのときに限る。よって $(*)$ が実数解をもつための必要十分条件は

$$s \leq 4 - 2\sqrt{2} \quad \text{または} \quad s \geq 4 + 2\sqrt{2},$$

であり、これが示すべきことであった。どの段階も逆にたどれるので、「必要十分」の両方向が得られる。二つの端点では解は重解になる。

検算

- (i) で $n = 7$ とすると、$\frac{1}{4}b^2 = 3 \cdot 49 + 50 = 197$、$ac = 7 \cdot 29 = 203$ であるから $\frac{1}{4}b^2 - ac = -6 < 0$ となる。$n = 11$ とすると $413 - 11 \cdot 37 = 6 > 0$ となる。
- (iii) では $4 - 2\sqrt{2} \approx 1.1716$、$4 + 2\sqrt{2} \approx 6.8284$ である。$s = 4$ とすると $f(1) = 1 - 4 + 2 = -1 < 0$ となり、予想どおり二つの値の間に入っている。
- コンピュータを用いて、(i) については n を 1 から 199 まで調べ、(ii) については約 5 百万件のランダムなケースを、(iii) については 10^5 個のランダムな s の値を検証した。いずれも上の結果と一致した。

よくある間違い

- (i) で $n = 5$ と $n = 10$ を含めてしまう。そこでは判別式が零になるので、（重解の）実数解が存在する。
- (ii) で、n が大きいときに $f(n) < 0$ となることだけを確かめてしまう。判別式の条件の要点は、小さい n も含めて f が**いたるところで**負になるということである。
- x の係数にある因数 2 を忘れ、判別式の中で $4(pn^2 + q)$ を誤った位置に置いてしまう。

STEP のその先へ

ここで用いた手法、すなわちパラメータを新たな変数とみなし、それについての二次式の符号を調べるという手法は、多項式の根がその係数にどのように依存するかを研究する入り口である。大学では、これは高次多項式の判別式へとつながり、さらに二次形式（quadratic form）$at^2 + bt + c$ が負定値（negative definite）であるのは $a < 0$ かつ $b^2 < 4ac$ のときであり、かつそのときに限るという考え方へとつながる。これと同じ判定法を 2 変数に対して用いると、多変数関数の停留点（stationary point）を分類することができる。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の上級問題集）には、判別式を用いた丁寧な議論に基づく STEP の問題がほかにもたくさん収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。