解答例

STEP II 1999、第 11 問

力学 ・ 放物運動と動く標的

> **STEP II 1999、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q11

鍵となる考え方

標的は円周上にとどまるので、砲弾は水平面上の O からちょうど距離 R の点に着弾しなければならない。また、砲はいつでも標的がこれから来る位置の方向へ旋回させることができる。したがって、すべては一つの放物体（projectile）に関する二つの事実、すなわちその到達距離（range）と飛行時間（time of flight）に帰着する。回転角は $\beta = \omega T$ であり、$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ を用いて α を消去すると四次方程式（quartic）が得られる。最後の部分は、解と係数の関係（Vieta's formulas）と円の弦（chord）の問題になる。

解答

砲弾を重力のみを受けて運動する質点（particle）としてモデル化する（空気抵抗（air resistance）は無視する）。砲弾は円を含む水平面上の O から発射され、$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ とする。

小問 1：$V^2 < gR$ の場合

（発射面内で）地面に沿った軸と鉛直上向きの軸をとる。時刻 t において

$$x = Vt\cos\alpha, \qquad y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

砲弾が水平面に戻る（$y = 0$、$t > 0$）のは

$$T = \frac{2V\sin\alpha}{g}, \qquad \text{のときで、水平距離は} \qquad x(T) = \frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{V^2\sin 2\alpha}{g}.$$

である。$\sin 2\alpha \leq 1$ であるから、どの鉛直面で発射しても、砲弾は O から V^2/g より遠くには着弾しない。標的は常に水平面上で O から距離 R の位置にあるので、命中するためには $R \leq V^2/g$、すなわち $V^2 \geq gR$ が必要である。よって $V^2 < gR$ ならば砲弾は決して標的に命中しない。これが示すべきことであった。

小問 2：β の方程式

ここで $V^2 > gR$ とする。砲弾は時刻 T、距離 R で標的に命中するので

$$T = \frac{2V\sin\alpha}{g}, \qquad R = \frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

標的は一定の角速度 ω で回転するので $\beta = \omega T$ であり、これより

$$\sin\alpha = \frac{g\beta}{2V\omega}.$$

を得る。これを到達距離の式に代入すると

$$\cos\alpha = \frac{gR}{2V^2\sin\alpha} = \frac{gR}{2V^2}\cdot\frac{2V\omega}{g\beta} = \frac{R\omega}{V\beta}.$$

となる。ここで $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より

$$\frac{g^2\beta^2}{4V^2\omega^2} + \frac{R^2\omega^2}{V^2\beta^2} = 1,$$

であり、両辺に $4V^2\omega^2\beta^2$ を掛けると

$$g^2\beta^4 - 4\omega^2V^2\beta^2 + 4R^2\omega^4 = 0,$$

となる。これが求める方程式である。

> **考えてみよう** なぜ値はちょうど二つなのか。最大四つになったり、一つもなかったりしないのはなぜか。

β^2 についての二次方程式とみると、その判別式（discriminant）は

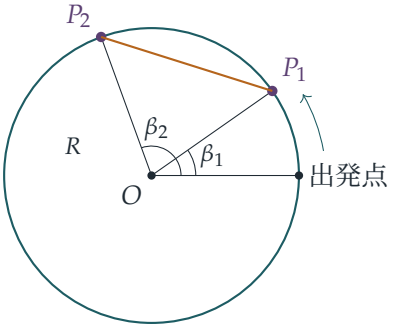
$$16\omega^4V^4 - 16g^2R^2\omega^4 = 16\omega^4(V^4 - g^2R^2) > 0,$$

である。$V^2 > gR$ だからである。よって β^2 の相異なる実数値が二つ存在する。それらの和 $4\omega^2V^2/g^2$ と積 $4R^2\omega^4/g^2$ はともに正であるから、β^2 の二つの値はいずれも正である。角 $\beta = \omega T$ は正であるから、β^2 の各値に対して β はちょうど一つ定まり、候補はちょうど二つ $\beta_1 < \beta_2$ となる。

それぞれの候補は実際に命中を与える。どちらの解についても、数 $g\beta/(2V\omega)$ と $R\omega/(V\beta)$ は正であり、（方程式より）それらの平方の和は 1 であるから、これらを正

弦・余弦とする $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ が存在する。その仰角（elevation）で、標的が β だけ回転した後に到達する点を通る鉛直面内に発射すれば、飛行時間は β/ω、到達距離は R となり、砲弾は標的に当たる。よって β のとりうる値はちょうど二つである。（これらは、到達距離 R を与える互いに余角の関係にある二つの仰角 α と $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ に対応する。）

小問 3：距離 P_1P_2



二つの着弾点はいずれも円周上にあり、発射の瞬間の標的の位置から反時計回りに測って角 β_1 と β_2 の位置にある。よって角 P_1OP_2 は $\beta_2 - \beta_1$ であり（必要なら 2π を法として簡約するが、弦には影響しない）、二等辺三角形（isosceles triangle）OP_1P_2 から

$$P_1P_2 = 2R\left|\sin\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right|.$$

を得る。β^2 についての二次方程式から

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{4\omega^2V^2}{g^2}, \qquad \beta_1^2\beta_2^2 = \frac{4R^2\omega^4}{g^2},$$

であり、$\beta_1, \beta_2 > 0$ であるから正の平方根をとってよい：$\beta_1\beta_2 = 2R\omega^2/g$。したがって

$$\begin{aligned}(\beta_2 - \beta_1)^2 &= \beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\beta_1\beta_2 \\ &= \frac{4\omega^2V^2}{g^2} - \frac{4R\omega^2}{g} = \frac{4\omega^2}{g^2}\left(V^2 - Rg\right),\end{aligned}$$

となり、$\beta_2 - \beta_1 = \dfrac{2\omega}{g}\sqrt{V^2 - Rg}$ である。よって

$$P_1P_2 = 2R\sin\left(\frac{\omega}{g}\sqrt{V^2 - Rg}\right),$$

が示された。（厳密には、正弦が非負であること、すなわち $\frac{\omega}{g}\sqrt{V^2 - Rg} \le \pi$ が必要である。そうでない場合、距離はこの式の絶対値となる。）

検算

- $V^2 \to gR^+$ のとき二つの仰角はともに $45°$ に近づくので、P_1 と P_2 は一致するはずである。実際、公式は 0 に近づく。
- $\beta_1\beta_2 = 2R\omega^2/g$ を直接確かめる：$\beta_1\beta_2 = (2V\omega/g)^2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2$ であり、$\alpha_2 = \frac{1}{2}\pi - \alpha_1$ とするとこれは $(2V\omega/g)^2 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 = (4V^2\omega^2/g^2)(gR/2V^2)$ となり、期待どおりである。
- 数値的に、$g = 9.8$、$R = 10$、$V = 14$、$\omega = 0.3$（SI 単位）として二つの軌道を逐次計算すると、弦の長さは約 5.97 m となり、$20\sin\left(0.3\sqrt{98}/9.8\right) \approx 5.969$ と一致する。

よくある間違い

- 砲をどの鉛直面にも向けられることを忘れること。最初の小問は到達距離だけの問題であり、標的がたまたまどこにあるかは関係ない。
- $\beta_1\beta_2$ が正である理由を述べずに $\beta_1^2\beta_2^2$ の平方根をとること。
- $P_1P_2 = R(\beta_2 - \beta_1)$ と書くこと。これは弧長（arc length）であって、直線距離ではない。

STEP のその先へ

動く標的に命中させることは、小さな**追跡**（pursuit）あるいは**迎撃**（interception）の問題である。まず命中の時刻を求め、次に照準を求める。二つの方程式からパラメータを消去して多項式を得て、それを解かずに係数から必要な情報を読み取るという手法は、大学で絶えず使うことになる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動や回転運動をこのような丁寧さで扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。