解答例

STEP II 1999、第 10 問

力学 ・ 繰り返される衝突

STEP II 1999、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s2-q10

鍵となる考え方

この連鎖における衝突はどれも同じ形をしている。質量 μ、速さ u で動く粒子が、静止している質量 $q\mu$ の粒子に衝突するのである。したがって、最初の衝突の計算を尺度を変えて用いれば、**すべての**衝突を記述できる。各粒子の最終速度がわかれば、追加の衝突が起こるかどうかという問題は、隣り合う粒子の最終速度を比較することに帰着する。さらに $q = e$ のときには速度が非常に簡単になるので、エネルギーの損失は単なる等比級数（geometric series）になる。

解答

最初の衝突

粒子を直線上を動く質点（point mass）とみなし、P_1 から P_2 へ向かう向きを正とする。衝突直後の P_1 と P_2 の速度をそれぞれ v_1、v_2 とする。運動量保存則（conservation of momentum）とニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）より

$$mV = mv_1 + qm\,v_2,$$
$$v_2 - v_1 = eV.$$

が成り立つ。$v_2 = v_1 + eV$ を第 1 式に代入すると $V = v_1 + qv_1 + qeV$ となるので、

$$v_1 = \left(\frac{1-eq}{1+q}\right)V, \qquad v_2 = v_1 + eV = \frac{1-eq+e+eq}{1+q}\,V = \left(\frac{1+e}{1+q}\right)V,$$

となり、これが求める結果である。

すべての衝突は同じ形をしている

次のようにおく。

$$\alpha = \frac{1-eq}{1+q}, \qquad \beta = \frac{1+e}{1+q}.$$

上の計算では m の実際の値をどこにも用いていない。すなわち、質量 μ の粒子が速度 u で静止している質量 $q\mu$ の粒子に衝突すると、衝突後の速度は αu となり、相手を速度 βu で送り出す。各 P_{k+1} の質量は P_k の q 倍であるから、P_{k+1} がまだ静止している限り、このことは P_k が P_{k+1} に衝突する場合に当てはまる。

$q \le e$ のとき衝突はちょうど $N-1$ 回である

$q \le e$ と仮定する。すると $eq \le e^2 < 1$ であるから $\alpha > 0$ であり、また $\beta > 0$ である。

連鎖を順に追っていく。P_1 が P_2 に衝突し、P_1 の速度は αV、P_2 の速度は βV となる。$\beta V > 0$ であるから、P_2 は静止している P_3 に向かって動き、これに衝突する。その結果、P_2 の速度は $\alpha\beta V$、P_3 の速度は $\beta^2 V$ となる。同様に続けると、P_k は静止している P_{k+1} に速度 $u_k = \beta^{k-1}V > 0$ で到達するので、隣り合う各組の間で 1 回ずつ衝突が起こる。したがって衝突は少なくとも $N-1$ 回ある。これらの衝突の後の速度は

$$w_k = \alpha\beta^{k-1}V \quad (1 \le k \le N-1), \qquad w_N = \beta^{N-1}V.$$

である。これらはすべて正であるから、すべての粒子が同じ向きに動く。

> **?** **考えてみよう** P_k が P_{k+1} に再び追いつくことがないのはなぜか？

衝突後、P_k はそれ以降一定の速度 w_k で動く。その後に接触しうる相手は P_{k+1} か P_{k-1} だけだからである。一方、P_{k+1} は P_{k+2} に衝突するまでは速度 $u_{k+1} = \beta^k V$ で動き、その後は w_{k+1} で動く（$k+1 = N$ ならば、前者の速度のまま永遠に動く）。P_k と P_{k+1} の間隔が縮まりうるのは P_k の方が速く動いている場合に限られる。そして次が成り立つ。

- $\beta^k V > \alpha\beta^{k-1}V$ は $\beta > \alpha$、すなわち $1+e > 1-eq$ と同値であり、これは正しいので、$u_{k+1} > w_k$ である。
- $k \le N-2$ のとき、$w_{k+1}/w_k = \beta = \dfrac{1+e}{1+q} \ge 1$ であり、これはまさに $q \le e$ であることによるので、$w_{k+1} \ge w_k$ である。
- $k = N-1$ のとき、$w_N/w_{N-1} = \beta/\alpha > 1$ であるから、$w_N > w_{N-1}$ である。

したがって、衝突後に P_{k+1} が P_k より遅くなることはなく、両者の間隔は決して縮まらない。（$q = e$ のときは $w_{k+1} = w_k$ となり、間隔は一定に保たれるが、詰まることはない。）これは隣り合うすべての組について成り立つので、それ以上の衝突は起こらず、衝突はちょうど $N-1$ 回である。

ここで $q \le e$ が効いてくる。$q > e$ ならば $\beta < 1$ となり、各粒子は最終的に後ろの粒子より遅くなるので、連鎖が自分自身に追いつき、さらに衝突が生じる。

$q = e$ のときに失われる運動エネルギー

いま $q = e$ であるから

$$\beta = \frac{1+e}{1+e} = 1, \qquad \alpha = \frac{1-e^2}{1+e} = 1-e.$$

である。どの粒子も速さ V で衝突される。衝突後、$P_1, \dots, P_{N-1}$ は $(1-e)V$ で、P_N は V で動く。P_k の質量は $e^{k-1}m$ であるから、最終的な運動エネルギー（kinetic energy）は

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^{N-1} \tfrac{1}{2} e^{k-1} m (1-e)^2 V^2 + \tfrac{1}{2} e^{N-1} m V^2 \\ &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[(1-e)^2 \cdot \frac{1-e^{N-1}}{1-e} + e^{N-1} \right] \\ &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[(1-e)(1-e^{N-1}) + e^{N-1} \right], \end{aligned}$$

となる。ここで等比級数の和 $1 + e + \cdots + e^{N-2} = \dfrac{1-e^{N-1}}{1-e}$ を用いた。最初の運動エネルギーは $\frac{1}{2}mV^2$ であるから、損失は

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} m V^2 - T &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[(1-e^{N-1}) - (1-e)(1-e^{N-1}) \right] \\ &= \tfrac{1}{2} m e \left(1 - e^{N-1} \right) V^2, \end{aligned}$$

であり、これが求める結果である。

検算

- **衝突ごとに。** $q = e$ のとき、P_k が P_{k+1} に衝突すると、P_k の速度は V から $(1-e)V$ に、P_{k+1} の速度は 0 から V に変わり、失われるエネルギーは $\frac{1}{2}e^{k-1}mV^2\left[1-(1-e)^2-e\right] = \frac{1}{2}m(1-e)e^kV^2$ である。$k = 1, \dots, N-1$ について和をとると $\frac{1}{2}m(1-e)V^2 \cdot e\,\dfrac{1-e^{N-1}}{1-e}$ となり、同じ答えが得られる。
- **極限。** $e \to 0$ のとき損失は 0 に近づく。実際、$q = e \to 0$ のとき後続の粒子の質量は無視できる。$N = 2$ のとき公式は $\frac{1}{2}me(1-e)V^2$ を与え、これは 1 回の衝突を直接計算した結果と一致する。
- **数値計算。** ランダムな $N \le 12$、ランダムな間隔、ランダムな $q \le e$ について運動を事象ごとにシミュレーションしたところ、衝突は常にちょうど $N-1$ 回であ

った。$N = 5$、$q = e = \frac{1}{2}$、$m = V = 1$ のとき、シミュレーションによる損失は $0.234375 = \frac{15}{64}$ であり、$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{16}\right)$ と一致した。

よくある間違い

- 最初の $N - 1$ 回の衝突が起こることだけを確かめてしまう。「ちょうど」と言うためには、後になってどの粒子も前の粒子に追いつかないことの論証も必要である。
- P_k の最終速度を、両者の衝突**直後**における P_{k+1} の速度（βu_k）と比較してしまう。正しくは、P_{k+2} に衝突して減速した後の最終速度と比較しなければならない。
- 反発の法則で符号を間違える。接近の速さの e 倍に等しいのは、離れる速さ $v_2 - v_1$ である。

STEP のその先へ

運動量を 1 つずつ受け渡していく質量の連鎖は、粒状物質（granular material）の中を伝わる衝撃の 1 次元モデルである。この問題の $q < 1$ の場合のように質量が一定の割合で減少していく連鎖は、衝撃を分散させて吸収する方法として物理学者によって研究されている。エネルギーの計算を整理し直すうまい方法として、**換算質量**（reduced mass）$\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ を用いるものがある。1 回の衝突で失われるエネルギーは $\frac{1}{2}\mu(1 - e^2)w^2$ であり、ここで w は接近の速さである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は重心系（centre-of-mass frame）で衝突を論じており、そこではこのような結果が見通しよく理解できる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。