解答例

STEP II 1999、第 1 問

純粋数学 ・ 大きな数の比較

> **STEP II 1999、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q1

鍵となる考え方

これらの数は大きすぎて直接比較することはできず、その対数（logarithm）でさえまだ大きすぎる。突破口は $\log_{10}$ を 2 回とることである。x、y、z はいずれも 10 の累乗であるから、二重対数（double logarithm）はどれも 100、x、y の短い和になり、それらは容易に比較できる。$\log_{10}$ は単調増加（increasing）であるから、二重対数を比較すればもとの数を比較したことになる。

解答

以下では $\log_{10}$ を log と書き、

$$L(a) = \log(\log a).$$

とおく。関数 $t \mapsto \log t$ は狭義単調増加（strictly increasing）であるから、$a, b > 10$ を満たす数（このとき $\log a, \log b > 1 > 0$）に対して、$a < b$ となるのは $L(a) < L(b)$ となるときであり、かつそのときに限る。用いる基本的な事実は

$$\log x = 100, \qquad \log y = x = 10^{100}, \qquad \log z = y = 10^{x}.$$

である。

小問 (i)

スターリング（Stirling）の近似（Stirling's approximation）で $n = x$ とし、$\log_{10}$ をとると、

$$\begin{aligned}\log a_1 &\approx \log\sqrt{2\pi} + \left(x + \tfrac{1}{2}\right)\log x - x\log \mathrm{e} \\ &= 100x - x\log \mathrm{e} + 50 + \log\sqrt{2\pi} \\ &= x\,(100 - \log \mathrm{e}) + 50.4\ldots.\end{aligned}$$

ここで $\log \mathrm{e} \approx 0.434$ であり、定数 $50.4\ldots$ は $x = 10^{100}$ に比べればまったく無視できる。したがって

$$\log a_1 \approx 99.566 \times 10^{100}, \qquad L(a_1) \approx 100 + \log 99.566 \approx 100 + 1.998 = 101.998\ldots \approx 102,$$

となり、示すべきことが得られた。

小問 (ii)

それぞれの数について $\log a_i$ を求め、次に $L(a_i)$ を求める。

- $a_2 = x^y$: $\log a_2 = y\log x = 100y$ であるから、$L(a_2) = 2 + \log y = x + 2$。
- $a_3 = y^x$: $\log a_3 = x\log y = x^2 = 10^{200}$ であるから、$L(a_3) = 200$。
- $a_4 = z^x$: $\log a_4 = x\log z = xy$ であるから、$L(a_4) = \log x + \log y = x + 100$。
- $a_5 = \mathrm{e}^{xyz}$: $\log a_5 = xyz\log \mathrm{e}$ であるから、

  $$L(a_5) = 100 + x + y + \log(\log \mathrm{e}) \approx y + x + 99.64,$$

  となる。ここで $\log(\log \mathrm{e}) = \log 0.434\ldots \approx -0.36$ を用いた。
- $a_6 = z^{1/y}$: $\log a_6 = \frac{1}{y}\log z = 1$ であるから、ちょうど $a_6 = 10$ である。
- $a_7 = y^{z/x}$: $\log a_7 = \frac{z}{x}\log y = \frac{z}{x}\cdot x = z$ であるから、$L(a_7) = \log z = y$。

小問 (i) で得た $L(a_1) \approx 102$ と合わせると、二重対数は

$$\underbrace{0}_{a_6},\ \underbrace{102}_{a_1},\ \underbrace{200}_{a_3},\ \underbrace{x+2}_{a_2},\ \underbrace{x+100}_{a_4},\ \underbrace{y}_{a_7},\ \underbrace{y+x+99.6}_{a_5}.$$

となる。

考えてみよう 小問 (i) では a_1 の近似値しか得られていない。それで a_1 の位置を決めるのに十分だろうか？

十分であり、しかもスターリングの公式すら必要ない。$x!$ の x 個の因数はどれも x 以下であるから $x! \le x^x$ となり、$\log a_1 \le x \log x = 10^{102}$ である。よって $L(a_1) \le 102 < 200 = L(a_3)$ が得られる。また $a_1 = x! > 10 = a_6$ は明らかである。したがって $a_6 < a_1 < a_3$ が厳密に成り立つ。

残りの比較を一つずつ正当化しよう。

- $a_3 < a_2$: $200 < 10^{100} + 2$。
- $a_2 < a_4$: $x + 2 < x + 100$。
- $a_4 < a_7$: $x + 100 < y = 10^x$ を示せばよい。$t \ge 3$ を満たすすべての t に対して $10^t > t + 100$ であり、ここでは $t = x = 10^{100}$ であるから、これはとてつもない余裕をもって成り立つ。
- $a_7 < a_5$: $x + 99.6 > 0$ であるから $y < y + x + 99.6$。(直接示すと：$\log a_5 = z \cdot xy \log \mathrm{e}$ かつ $xy \log \mathrm{e} > 1$ であるから、$\log a_5 > z = \log a_7$。)

a_6 以外の数はすべて 10 より大きいので L の単調性（monotonicity）が使え、大きさの順序は

$$a_6 < a_1 < a_3 < a_2 < a_4 < a_7 < a_5.$$

となる。

検算

小問 (i) については、$n = 10^2, 10^3, 10^5, 10^8$ に対して、スターリングの公式を（対数ガンマ関数 (log-gamma function) を用いて求めた）正確な $\log_{10} n!$ と比較した。a_1 に対する二重対数の式は 10^{-6} 以内の誤差で一致し、$n = 10^{100}$ に対しては 101.998 を与える。小問 (ii) については、$y = 10^x$ を整数として正確に保持できる $k = 2, 3, 4$ に対して $x = 10^k$ とおき、計算全体をやり直した。毎回同じ順序 $a_6 < a_1 < a_3 < a_2 < a_4 < a_7 < a_5$ が得られるので、この結果は数 100 の大きさに依存しない。

よくある間違い

- 対数を 1 回だけとって比較し、行き詰まってしまう：$\log a_7 = z$ と $\log a_4 = xy$ はまだ大きすぎて一目では比較できない。もう一度対数をとること。
- e^{xyz} を底 10 に変換するときに因数 $\log \mathrm{e}$ を忘れる。ここではほとんど影響しないが、$L(a_5)$ は約 0.36 ずれる。
- a_6 が単に 10 であり、すべての中で最小であることを見落とす。

STEP のその先へ

反復対数（iterated logarithm）や指数のタワー（towers of exponents）は、解析学や計算機科学において増大の度合いを測る道具である。たとえば反復対数 $\log^* n$ はある種のアルゴリズムの実行時間に現れ、「タワー」関数はラムゼー理論（Ramsey theory）における結果の上界を与える。スターリングの公式そのものは漸近級数（asymptotic series）の初項であり、それを丁寧に証明することは大学 1 年次の解析学の古典的な演習問題である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、ここに関わる極限や不等式に慣れるのに適した本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。