解答例

STEP I 1999、第 9 問

力学 ・ 等速運動の運動学

STEP I 1999、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

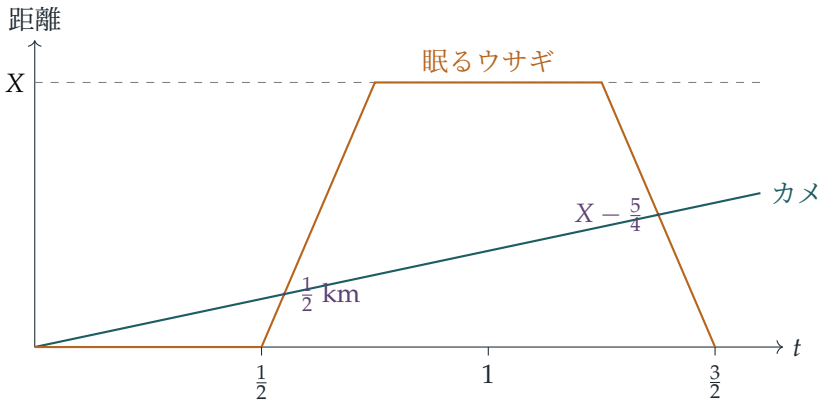
step.maths.org/questions/99-s1-q9

鍵となる考え方

すべての運動は一定の速さで行われるので、どの移動時間も単に距離を速さで割ったものである。2 匹が出会うたびに、両者は同じ時刻に同じ場所にいる。そこで、それぞれについて時計の時刻を書き出し、両者を等しいとおく。2 回の出会いから、v と V についての 2 つの方程式が得られる。$1/v$ と $1/V$（1 キロメートルあたりの時間）を用いると、方程式は線形（linear）のままである。

解答

2 匹はどちらも同じ直線コースに沿って一定の速さで動くとモデル化し、折り返しにかかる時間は無視する。時刻 t はスタートから時間（hour）単位で測る。距離–時間グラフ（distance–time graph）の略図（最後に求める X の値で描いたもの）に、用いる 2 つの交点を示す。



1 回目の出会い

カメはスタートから $\frac{1}{2}$ km の地点に時刻 $\dfrac{1/2}{v}$ に到達する。ウサギは $t = \frac{1}{2}$ に出発し、同じ地点に時刻 $\frac{1}{2} + \dfrac{1/2}{V}$ に到達する。2 匹はそこに同時にいるので、

$$\frac{1}{2v} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2V}, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{1}{v} = 1 + \frac{1}{V}. \tag{1}$$

2 回目の出会い

ウサギは時刻 $\frac{1}{2} + \dfrac{X}{V}$ に野菜畑に到達し、30 分眠って、$1 + \dfrac{X}{V}$ に出発する。その後 $\frac{5}{4}$ km 走って戻るので、カメと出会う時刻は

$$1 + \frac{X}{V} + \frac{5}{4V} = 1 + \frac{X + \frac{5}{4}}{V}.$$

である。カメはまだ往路の途中で、スタートから $X - \frac{5}{4}$ km の地点にいるので、$\dfrac{X - \frac{5}{4}}{v}$ 時間歩いてきたことになる。2 つの時刻を等しいとおくと、

$$\frac{X - \frac{5}{4}}{v} = 1 + \frac{X + \frac{5}{4}}{V}. \tag{2}$$

考えてみよう 方程式が 2 つ、未知数が 2 つあるが、(2) では $1/v$ に X が掛かっている。どうすれば V だけを取り出せるだろうか？

(1) を (2) に代入する。すると X/V の項が打ち消し合い、そのおかげで V がきれいに求まる。

$$\begin{aligned}
\left(X - \tfrac{5}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{V}\right) &= 1 + \frac{X + \frac{5}{4}}{V} \\
X - \tfrac{5}{4} + \frac{X - \frac{5}{4}}{V} &= 1 + \frac{X + \frac{5}{4}}{V} \\
X - \tfrac{9}{4} &= \frac{5/2}{V}.
\end{aligned}$$

したがって

$$V = \frac{5/2}{X - \frac{9}{4}} = \frac{10}{4X - 9},$$

となり、示すべき式が得られた。（これが正の速さであるためには $X > \frac{9}{4}$ が必要であり、このことを最後の部分のために覚えておく。）

次に (1) から、

$$\frac{1}{v} = 1 + \frac{4X - 9}{10} = \frac{4X + 1}{10}, \qquad \text{よって} \qquad v = \frac{10}{4X + 1}.$$

X を求める

ウサギは $1+\dfrac{X}{V}$ に畑を出発し、家に帰るのにさらに $\dfrac{X}{V}$ 時間かかるので、ゴールするのは $1+\dfrac{2X}{V}$ である。これを $\frac{3}{2}$ と等しいとおくと $\dfrac{2X}{V}=\frac{1}{2}$ となり、$V=4X$ である。したがって

$$\begin{aligned} 4X &= \frac{10}{4X-9} \\ 16X^2-36X-10 &= 0 \\ 8X^2-18X-5 &= 0 \\ (2X-5)(4X+1) &= 0. \end{aligned}$$

解 $X=-\frac{1}{4}$ は距離としてありえない（そもそも $X>\frac{9}{4}$ が必要である）ので、

$$X=\tfrac{5}{2}\ \text{km}.$$

この値のとき、ウサギの速さは $V=10\,\text{km/h}$、カメの速さは $v=\frac{10}{11}\,\text{km/h}$ である。

検算

$X=\frac{5}{2}$、$V=10$、$v=\frac{10}{11}$ を物語に戻して確かめる。カメは $t=0.55$ に $\frac{1}{2}\,\text{km}$ の地点に到達し、ウサギは $t=0.5$ に出発してそこまで $0.05\,\text{h}$ かかる。よって 2 匹は出会う。ウサギは $t=0.75$ に畑に到達し、$t=1.25$ に出発する。畑から $1.25\,\text{km}$（スタートから $1.25\,\text{km}$）の地点に到達するのは $t=1.375$ であり、カメが $1.25\,\text{km}$ の地点に到達するのは $1.25\times1.1=1.375$ である。よって 2 匹は再び出会う。ウサギが家に着くのは $1.25+0.25=1.5$ である。$X>\frac{9}{4}$ を満たす任意の値を V と v の式に代入して競走を再現しても、ちょうど正しい場所で出会うことが確かめられる。

よくある間違い

- ウサギの時計の時刻を書くときに、30 分の睡眠のうちどちらか、特に畑での睡眠を忘れる。
- 2 回目の出会いの地点を、野菜畑からではなく**スタート**から $\frac{5}{4}\,\text{km}$ の地点とする。
- 二次方程式（quadratic equation）の解を両方とも残してしまう。負の距離は理由を添えて捨てなければならない。

STEP のその先へ

上のような距離–時間グラフを用いると、文章題は直線がどこで交わるかという問題に変わる。これはどの力学（mechanics）の講義でも運動学（kinematics）の出発点となる考え方である。ここでは速さの逆数（reciprocal）（**ペース**（pace））を用いることで方程式が線形になった。問題を線形化するような変数を選ぶことは、応用数学の至るところで繰り返し現れる手法である。これらの考え方から発展する大学 1 年生向けの運動の扱いについては、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。