解答例

STEP I 1999、第 8 問

純粋数学 • 調和級数の評価

> **STEP I 1999、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q8

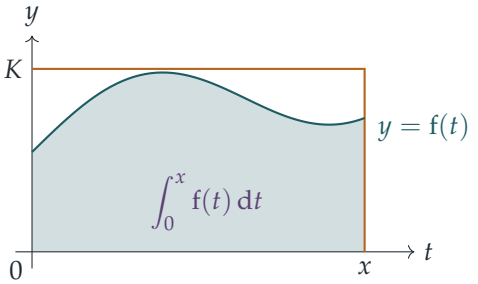
鍵となる考え方

積分（integral）は面積であるから、曲線を長方形の中に閉じ込めれば、その面積は 0 と長方形の面積の間に閉じ込められる。指定された被積分関数（integrand）は部分分数分解（partial fractions）によって分解でき、その積分はちょうど $\ln(\frac{n}{n-1}) - \frac{1}{n}$ になる。そして被積分関数の上下からの評価が求める不等式を与える。その後はすべてが次々に打ち消し合う（telescoping）。n について和をとると、対数の連鎖は $\ln N$ になり、逆数の差の連鎖はほとんど何も残らない。

解答

積分を評価する

$0 \leq t \leq x$ における $y = \mathrm{f}(t)$ のグラフを描く。$0 \leq \mathrm{f}(t) \leq K$ であるから、曲線全体は $(0,0)$ と (x,K) を頂点とする長方形の内部にあり、t 軸上またはその上側にある。



積分は曲線の下の網かけ部分の面積である。曲線は決して軸より下に行かないから、

この面積は負にはならない。また、この領域は長方形の内部にあるから、面積は長方形の面積 Kx を超えない。よって

$$0 \leq \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \leq Kx.$$

$\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$ に関する不等式

$n > 1$ とする。$0 \leq t \leq 1$ のとき $n - t \geq n - 1 > 0$ であるから、被積分関数は定義されている。これを部分分数に分解すると

$$\frac{t}{n(n-t)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-(n-t)}{n-t} = \frac{1}{n-t} - \frac{1}{n},$$

となるので

$$\int_0^1 \frac{t}{n(n-t)}\,\mathrm{d}t = \Big[-\ln(n-t) - \frac{t}{n}\Big]_0^1 = \ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n} = \ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big) - \frac{1}{n}.$$

次に、$[0,1]$ 上で被積分関数を評価する。分子 t は非負で分母 $n(n-t)$ は正であるから、被積分関数は 0 以上である。t が 0 から 1 まで増加するとき、分子は大きくなり正の分母は小さくなるから、被積分関数は増加し、その最大値は $t = 1$ でとる：

$$0 \leq \frac{t}{n(n-t)} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

最初の結果を $x = 1$、$K = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ として用いると

$$0 \leq \ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big) - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

となり、求める不等式が得られる。

$n = 2$ から N までの和

$n = 2, 3, \ldots, N$（ただし $N \geq 2$）について不等式を足し合わせる。対数は次々に打ち消し合う。実際

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big) = \ln\Big(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{N}{N-1}\Big) = \ln N,$$

であり、右辺も同様である：

$$\sum_{n=2}^{N} \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) = \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\Big) = 1 - \frac{1}{N}.$$

したがって

$$0 \leq \ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{N} \leq 1.$$

（$N = 1$ のときは和は空であり $\ln 1 = 0$ であるから、このときも主張は成り立つ。）

考えてみよう この二重不等式のどちらの半分が調和級数（harmonic series）の発散を示し、どちらの半分が上界を与えるだろうか？

左半分は和が $\ln N$ **以下**であることを、右半分は和が $\ln N - 1$ **以上**であることを述べている。発散を示すには下界が必要なので、右半分を用いる。

発散

$\ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \leq 1$ から $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \geq \ln N - 1$ が得られ、$n = 1$ の項を加えると

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \ln N.$$

$N \to \infty$ のとき $\ln N \to \infty$ であるから、和も無限大に発散（diverge）する。

$N < 10^{30}$ のときの評価

今度は左半分を用いる。$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \leq \ln N$ であるから

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \ln N.$$

$2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$ であるから、両辺を 10 乗すると $10^{30} < 2^{100}$ が得られる。よって $N < 10^{30}$ ならば $N < 2^{100}$ であり、ln は増加関数であるから

$$\ln N < 100 \ln 2 < 100,$$

となる。ここで $\ln 2 < 1$ を用いた。これは $2 < \mathrm{e}$ から成り立つ。ゆえに

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \ln N < 101.$$

検算

- $\int_0^1 \frac{t}{n(n-t)}\,\mathrm{d}t$ にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用した値は、$n > 1$ の多くの値について $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n}$ と一致する。例えば $n = 2$ のとき、どちらも $\ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.193$ となり、これは 0 と $\frac{1}{2}$ の間にある。
- 2×10^5 以下のすべての N について、$\ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}$ は $[0, 1]$ に含まれる。$N = 2 \times 10^5$ のとき、その値は約 0.4228 であり、$1 - \gamma \approx 0.4228$ に近い。ここで γ はオイラー（Euler）の定数である。
- この評価にはかなり余裕がある。$1 + 30 \ln 10 \approx 70.1$ であり、実際には $\sum_{n=1}^{10^{30}} \frac{1}{n} \approx 69.65$ である。調和級数は発散するが、きわめてゆっくりと発散するのである。

よくある間違い

- 二重不等式の誤った側を用いること。発散を示すには和の**下界**が必要であり、最後の小問では**上界**が必要である。
- $n = 1$ の項を忘れること。不等式は $\sum_{n=2}^{N}$ についてのものであるが、結論は $\sum_{n=1}^{N}$ についてのものである。
- 被積分関数の最大値が $t = 1$ でとられることの根拠を示さないこと。増加関数であると述べる（あるいは単に $t \leq 1$ かつ $n - t \geq n - 1$ であると述べる）だけで十分である。

STEP のその先へ

量 $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln N$ は減少し、かつ下に有界であるから、収束（converge）する。その極限がオイラーの定数 $\gamma \approx 0.5772$ であり、γ が有理数（rational）であるかどうかはいまだに誰にもわかっていない。ここで行ったように和と積分を比較する方法は**積分判定法**（integral test）と呼ばれ、大学 1 年目の解析学（analysis）の講義で級数について最初に学ぶ道具の一つである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、これが厳密に定式化される様子を見るのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。