解答例

STEP I 1999、第 7 問

純粋数学 • 2 階の微分方程式

> **STEP I 1999、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q7

鍵となる考え方

関数 $\sin(k\sin^{-1}x)$ を 2 回微分するのは厄介に見えるが、$x=\sin\theta$ とおいて $y=\sin k\theta$ と書けば扱いやすくなる。1 回微分した式に $\sqrt{1-x^2}$ を掛けてからもう一度微分すると、計算が短くて済む。最後の部分の要点は、1 点における値と傾きが与えられた 2 階微分方程式（second-order differential equation）の解はただ一つしかない、ということである。したがって、求めた多項式は**必ず** $\sin(3\sin^{-1}x)$ に一致する。

解答

微分方程式

$-1<x<1$ において $y=\sin(k\sin^{-1}x)$ とする。$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を用いて連鎖律（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{k\cos(k\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}},\qquad\text{したがって}\qquad\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=k\cos(k\sin^{-1}x).$$

この 2 番目の形を x で微分する（左辺には積の微分法（product rule）、右辺には連鎖律を用いる）：

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{k^2\sin(k\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{k^2y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$-1<x<1$ では 0 でない $\sqrt{1-x^2}$ を両辺に掛けると

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+k^2y=0,$$

となり、これは求める $(*)$ である。

$k = 3$ のときの 3 次式の解

$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ とおく。$x = 0$ で $y = 0$ という条件から $D = 0$、$x = 0$ で $\frac{dy}{dx} = 3$ という条件から $C = 3$ である。ここで

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad y'' = 6Ax + 2B,$$

であり、$k^2 = 9$ として $(*)$ に代入すると

$$(1 - x^2)(6Ax + 2B) - x(3Ax^2 + 2Bx + C) + 9(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 0.$$

これはすべての x について成り立たなければならないので、係数を比較する（comparing coefficients）：

$$\begin{aligned} x^3: &\quad -6A - 3A + 9A = 0 \text{ （任意の } A \text{ で成立）}, \\ x^2: &\quad -2B - 2B + 9B = 5B = 0, \\ x^1: &\quad 6A - C + 9C = 6A + 8C = 0, \\ x^0: &\quad 2B + 9D = 0. \end{aligned}$$

よって $B = 0$（$D = 0$ と矛盾しない）であり、$6A = -8C = -24$ から $A = -4$ を得る。求める解は

$$y = 3x - 4x^3.$$

$\sin 3\theta$ を表す

> **考えてみよう** 同じ方程式の解が 2 つある：$\sin(3\sin^{-1} x)$ と $3x - 4x^3$ である。なぜこれらは同じ関数でなければならないのか？

どちらも $k = 3$ のときの $(*)$ を満たし、どちらも $x = 0$ において同じ条件を満たす。多項式のほうはそうなるように作った。$y = \sin(3\sin^{-1} x)$ については $y(0) = \sin 0 = 0$ であり、上で求めた 1 階導関数から $y'(0) = 3\cos 0/1 = 3$ である。

$-1 < x < 1$ では $1 - x^2 \neq 0$ で $(*)$ を割ってよい。すると $y'' = \dfrac{xy' - 9y}{1 - x^2}$ となる。これは連続な係数をもつ 2 階線形微分方程式（linear second-order equation）であり、このような方程式で $x = 0$ における y と y' の値を与えた解はちょうど一つ存在する。（$x = 0$ から少しずつ進んでいく様子を思い浮かべるとよい。方程式は y と y' から y'' を決めるので、初期値がすべてを決定する。）したがって

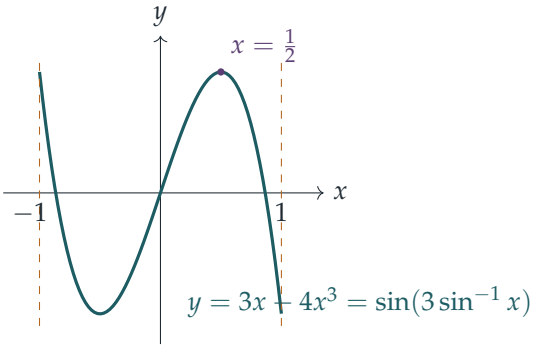
$$\sin(3\sin^{-1} x) = 3x - 4x^3 \qquad \text{、ただし } -1 < x < 1,$$

であり、連続性から $x = \pm 1$ でも成り立つ。

ここで $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ として $x = \sin\theta$ とおくと $\sin^{-1} x = \theta$ であるから

$$\boxed{\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.}$$

これは $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ に限らず、すべての θ について成り立つ。両辺とも周期（period）2π をもつ。$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ のときは $\varphi = \pi - \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ とおく。すると $\sin\varphi = \sin\theta$ かつ $\sin 3\varphi = \sin(3\pi - 3\theta) = \sin 3\theta$ であるから、φ についての恒等式から θ についての恒等式が得られる。



このグラフは、おなじみの曲線 $\sin 3\theta$ を $x = \sin\theta$ を通して見たものである。θ が $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで動くとき、3θ は 1 周期半ぶんの振動をなぞる。そのため $x = \pm\frac{1}{2}$（$3\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ となる点）に 2 つの極値点（turning points）が現れる。

検算

- $\theta = \frac{\pi}{2}$：$\sin\frac{3\pi}{2} = -1$ かつ $3 - 4 = -1$。　$\theta = \frac{\pi}{6}$：$\sin\frac{\pi}{2} = 1$ かつ $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$。
- 数値的には、$\theta = 0.7$ で $\sin 2.1 = 0.86321$、$3(0.64422) - 4(0.64422)^3 = 0.86321$ となる。
- 同じ恒等式は $\sin(2\theta + \theta)$ と 2 倍角の公式（double-angle formulae）からも導ける。これはよい独立した検算になる。

よくある間違い

- $\dfrac{k\cos(k\sin^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}}$ を商の微分法（quotient rule）でそのまま微分する。正しいが、計算が煩雑になる。先に平方根を払っておくほうがはるかにすっきりする。
- 3 次式が $\sin(3\sin^{-1} x)$ に等しい**理由**を述べ忘れる。同じ方程式を満たすだけでは不十分で、2 つの解が $y(0)$ と $y'(0)$ も共有していなければならない。

STEP のその先へ

方程式 $(*)$ はチェビシェフ（Chebyshev）の微分方程式である。$k = n$ が整数のときは多項式の解をもち、$\cos(n\cos^{-1}x)$ はチェビシェフ多項式（Chebyshev polynomial）$T_n(x)$ である。これは数値近似において中心的な役割を果たす。ここで用いた一意性定理（uniqueness theorem、ピカール–リンデレーフの定理（Picard–Lindelöf theorem））は、大学 1 年次の微分方程式の講義で証明される。このような方程式に対するべき級数（power series）による解法は、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）で扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。