解答例

STEP I 1999、第 6 問

純粋数学 ・ 二次式の極値

STEP I 1999、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s1-q6

鍵となる考え方

閉区間（closed interval）上の直線は、その端点で最大値・最小値をとり、どちらの端点がどちらを与えるかは傾き（gradient）の符号だけで決まる。$c > 0$ の二次関数（quadratic）では、グラフは $\cup$ 字形の放物線（parabola）になる。最大値はやはり端点でとるが、最小値は**頂点（*vertex*）が区間内にあれば**頂点でとり、そうでなければ頂点に近い方の端点でとる。したがって、問題全体は頂点 $x = -b/(2c)$ が $[-10, 10]$ に対してどこに位置するかという問いに帰着する。

解答

小問 (i)

$f(x) = bx + a$ とおくと、$f(10) = a + 10b$、$f(-10) = a - 10b$ である。

- $b > 0$ のとき、f は狭義単調増加（strictly increasing）であるから、最小値は $f(-10) = a - 10b$（$x = -10$ のとき）、最大値は $f(10) = a + 10b$（$x = 10$ のとき）である。
- $b = 0$ のとき、すべての x に対して $f(x) = a$ であるから、最大値と最小値はともに a である。
- $b < 0$ のとき、f は狭義単調減少であるから、最大値は $f(-10) = a - 10b$（$x = -10$ のとき）、最小値は $f(10) = a + 10b$（$x = 10$ のとき）である。

三つの場合はすべて次のようにまとめられる。

$$\text{最大値} = a + 10|b|, \qquad \text{最小値} = a - 10|b|.$$

小問 (ii)

$c \geq 0$ として $g(x) = cx^2 + bx + a$ とおく。$c = 0$ ならばこれは小問 (i) そのものであり、答えは上と同じく $a \pm 10|b|$ である。以下では $c > 0$ とし、平方完成（completing the square）を行う。

$$g(x) = c\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + a - \frac{b^2}{4c}.$$

グラフは頂点が $x_0 = -\dfrac{b}{2c}$ にある $\cup$ 字形の放物線であり、g は**すべての**実数 x にわたる最小値をここでとる。また、g は $x < x_0$ で減少し、$x > x_0$ で増加する。端点での値は

$$g(10) = a + 100c + 10b, \qquad g(-10) = a + 100c - 10b.$$

である。

最大値。

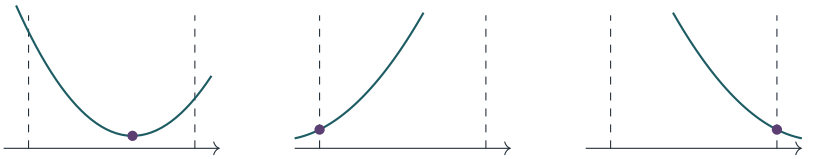
> **考えてみよう** 頂点がどこにあっても、区間上での g の最大値が必ずいずれかの端点でとられるのはなぜか。

$c > 0$ であるから、$g(x)$ は距離 $|x - x_0|$ を通してのみ x に依存し、その距離が大きくなるほど増加する。$[-10, 10]$ 上で距離 $|x - x_0|$ が最大になるのはいずれかの端点（x_0 から遠い方）である。よって最大値は $g(10)$ と $g(-10)$ の大きい方であり、両者の差は $g(10) - g(-10) = 20b$ である。したがって、

- $b > 0$ ならば、最大値は $a + 100c + 10b$ であり、$x = 10$ でとる。
- $b < 0$ ならば、最大値は $a + 100c - 10b$ であり、$x = -10$ でとる。
- $b = 0$ ならば、最大値は $a + 100c$ であり、両端点でとる。

いずれの場合も 最大値 $= a + 100c + 10|b|$ である。これは $c = 0$ のときにも成り立つ。

最小値。 ここでは x_0 の位置が問題になる。頂点が区間内にあるのは、ちょうど $-10 \leq -\frac{b}{2c} \leq 10$ のとき、すなわち（$2c > 0$ を掛けて）$-20c \leq b \leq 20c$、つまり $|b| \leq 20c$ のときである。



破線は $x = \pm 10$ であり、点は区間上での最小値を表す。

- $|b| \le 20c$（**頂点が区間内にある場合**）。最小値は全体での最小値

$$a - \frac{b^2}{4c}, \quad \text{ただし} x = -\frac{b}{2c}.$$

である。

- $b > 20c$（**頂点が左側、$x_0 < -10$ の場合**）。$[-10, 10]$ 上では $x > x_0$ であるから、g はそこで増加し、最小値は $g(-10) = a + 100c - 10b$ であり、$x = -10$ でとる。
- $b < -20c$（**頂点が右側、$x_0 > 10$ の場合**）。このとき g は区間全体で減少するから、最小値は $g(10) = a + 100c + 10b$ であり、$x = 10$ でとる。

区間外の二つの場合をまとめると、$|b| > 20c$ のとき 最小値 $= a + 100c - 10|b|$ となる。

考えてみよう 境界 $|b| = 20c$ ではどうなるか。そこで二つの式は食い違わないか。

食い違わない。$b = 20c$ ならば $a - \frac{b^2}{4c} = a - 100c$ であり、$a + 100c - 10b = a - 100c$ でもある。このとき頂点はちょうど $x = -10$ にあるからである。$b = -20c$ の場合も同様である。したがって b が $\pm 20c$ をまたぐとき答えは連続的に変化し、境界をどちらの場合に含めても構わない。

まとめ。 $-10 \le x \le 10$ かつ $c \ge 0$ のとき、

$$\text{最大値} = a + 100c + 10|b|, \qquad \text{最小値} = \begin{cases} a - \dfrac{b^2}{4c}, & c > 0 \text{ かつ} |b| \le 20c, \\ a + 100c - 10|b|, & |b| > 20c, \\ a, & b = c = 0. \end{cases}$$

$c = 0$、$b \ne 0$ の場合は $|b| > 20c = 0$ に含まれ、小問 (i) の結果に戻る。

検算

- $g(x) = x^2 + 4x + 1$ とする。$|b| = 4 \le 20$ であるから、最小値は $x = -2$ における $1 - 4 = -3$、最大値は $x = 10$ における $1 + 100 + 40 = 141$ である。直接代入しても一致する。
- $g(x) = x^2 + 30x$ とする。$b = 30 > 20$ であるから、頂点 $x = -15$ は区間外にあり、最小値は $g(-10) = 100 - 300 = -200$ である。実際 $g(-10) = -200$ であり、g は $[-10, 10]$ 上で増加する。
- 簡単なコンピュータ検証として、$c = 0$ や境界 $|b| = 20c$ を含む 1000 組のランダムな (a, b, c) について、$[-10, 10]$ 内の 401 点での総当たり探索（有理数による厳密計算）と公式を比較した。すべての場合で一致した。

よくある間違い

- 頂点が $[-10, 10]$ 内にあるかを確かめずに、$a - \frac{b^2}{4c}$ を最小値として答えてしまう。
- $c = 0$ の場合（頂点がなく、c で割ることもできない）や $b = c = 0$ の場合を忘れる。
- 頂点が区間外にあるとき、どちらの端点が最小値を与えるかを取り違える。最小値を与えるのは頂点に**近い方**の端点である。

STEP のその先へ

この問題の背後にあるのは最大値・最小値定理（Extreme Value Theorem）である。有界閉区間上の連続関数（continuous function）は最大値と最小値をとり、それらは端点か区間内部の停留点（stationary point）のいずれかでとられる。$c \ge 0$ の $cx^2 + bx + a$ のような凸関数（convex function）が端点で最大値をとるという観察は、凸最適化（convex optimisation）の第一歩であり、凸最適化は現代の応用数学の多くを支えている。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は最大値・最小値定理を丁寧に証明している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。