解答例

STEP I 1999、第 5 問

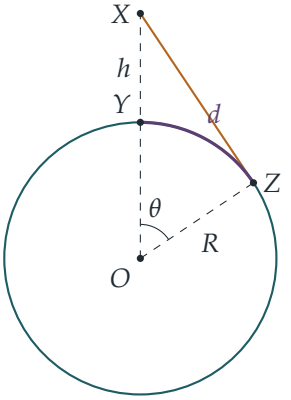
純粋数学 • 小さな角の近似

> **STEP I 1999、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q5

鍵となる考え方

「ちょうど地平線上に見える」とは、Z から X への視線が地球をかすめることを意味する。したがってこの視線は Z における接線（tangent）であり、半径 OZ に垂直である。これにより中心 O を頂点にもつ直角三角形ができ、弧（arc）YZ の長さは O における角の R 倍となる。二つの近似（approximation）は、この角が小さい場合と、直角に近い場合をそれぞれ考えることから得られる。

解答



小問 (i)

地球の中心を O とし、$\theta = \angle YOZ$ とおく。X は Y の真上にあるから、3 点 O, Y, X は同一直線上にあり、$OX = R + h$ である。X は Z からちょうど見えるので、直線 ZX

は Z で地球に接し、半径 OZ に垂直である。直角三角形 OZX において

$$\cos\theta = \frac{OZ}{OX} = \frac{R}{R+h}.$$

半径 R の円で中心角 θ に対する弧 YZ の長さは $R\theta$ であるから

$$d = R\arccos\left(\frac{R}{R+h}\right).$$

ここで $0 < R/(R+h) < 1$ であるから、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。

小問 (ii)

h が R に比べて小さいとき、$\cos\theta = R/(R+h)$ は 1 に近いので θ は小さく、$\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ を用いてよい。また

$$\frac{R}{R+h} = 1 - \frac{h}{R+h} \approx 1 - \frac{h}{R},$$

である。$R+h \approx R$ だからである。両者を等しいとおくと

$$1 - \tfrac{1}{2}\theta^2 \approx 1 - \frac{h}{R} \quad\Longrightarrow\quad \theta^2 \approx \frac{2h}{R} \quad\Longrightarrow\quad \theta \approx \sqrt{\frac{2h}{R}},$$

となる。ただし $\theta > 0$ より正の平方根をとった。よって

$$d = R\theta \approx R\sqrt{\frac{2h}{R}} = \sqrt{2}\,(Rh)^{1/2},$$

であり、これは $k = \sqrt{2}$ とした求める形である。

小問 (iii)

今度は $R/(R+h)$ が小さいので、$\cos\theta$ は 0 に近く、θ は小さいのではなく $\frac{\pi}{2}$ に近い。与えられた近似は小さい角に対してしか使えないので、実際に小さい角のほうを測ることにする。

> **考えてみよう** ここで小さいのはどの角か。また、その角にはどの近似が使えるか。

$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$ とおく。ここで $\phi = \angle OXZ$ は衛星における角であり、衛星が遠くにあるとき小さい。すると $\cos\theta = \sin\phi$ であるから

$$\sin\phi = \frac{R}{R+h}.$$

答えには R^2/h の項が含まれるので、これを R/h について 2 次まで求める必要がある。$R/h < 1$ であるから二項展開（binomial expansion）が使えて

$$\frac{R}{R+h} = \frac{R}{h}\left(1 + \frac{R}{h}\right)^{-1} = \frac{R}{h} - \frac{R^2}{h^2} + \cdots.$$

$\sin\phi \approx \phi$ を用いると

$$\phi \approx \frac{R}{h} - \frac{R^2}{h^2}.$$

したがって

$$\begin{aligned} d = R\theta &= R\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \\ &\approx \frac{\pi}{2}R - \frac{R^2}{h} + \frac{R^3}{h^2}. \end{aligned}$$

最後の項は R^2/h よりさらに R/h 倍だけ小さいので、これを無視すると

$$d \approx \frac{\pi}{2}R - \frac{R^2}{h},$$

が得られる。これは $a = \frac{\pi}{2}, b = -1$ とした求める形である。

この次数までであれば $\sin\phi \approx \phi$ を用いても問題ない。この近似の誤差はおよそ $\frac{1}{6}\phi^3$ であり、これは R^3/h^3 のオーダーなので、d には R^4/h^3 のオーダーでしか影響しないからである。

検算

- 極限が妥当である。$h \to 0$ のとき $d \to 0$ となる。$h \to \infty$ のとき $d \to \frac{\pi}{2}R$ となり、これは地球を 4 分の 1 周する長さである。非常に遠くにある衛星からはほぼ半球（hemisphere）全体が見えるということである。項 $-R^2/h$ は負なので、d は下から $\frac{\pi}{2}R$ に近づく。$\theta < \frac{\pi}{2}$ であるから、そうでなければならない。
- 数値で確かめると、$R = 1, h = 10^{-4}$ のとき、厳密な d を $\sqrt{2Rh}$ で割った値は 0.99996 である。$h = 1, R = 0.01$ のとき、厳密な d と $\frac{\pi}{2}R - R^2/h$ の差は 9.9×10^{-7} であり、予想どおりおよそ R^3/h^2 である。
- 半径 6370 km の地球の上空 300 km にある衛星では、厳密な d は約 1918 km であり、$\sqrt{2Rh}$ によると 1955 km となる。

よくある間違い

- 小問 (iii) で $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ を使ってしまう。そこでは θ は $\frac{\pi}{2}$ に近く、小さくない。
- 小問 (iii) で $R/(R+h)$ を 1 次までしか展開しない。すると R^2/h の項が失われ、誤った b が得られる。

STEP のその先へ

どちらの小問も漸近展開（asymptotic expansion）である。厳密な d を小さなパラメータ h/R または R/h のべきで展開し、誤差を評価しながら指定された次数までの項を残している。「$\approx$」をランダウの記号（big-O notation）と剰余項つきのテイラーの定理（Taylor's theorem with remainder）を用いて厳密にすることは、大学 1 年次の解析学で扱う話題である。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照するとよい。Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題集）には、この種の近似に関する STEP の演習がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。