解答例

# STEP I 1999、第 4 問

純粋数学 ・ 絶対値を含む領域

> **STEP I 1999、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q4

## 鍵となる考え方

絶対値記号（modulus signs）は平面をいくつかの領域に分け、各領域ではそれぞれの括弧の中身の符号が一定になる。そのため各領域において、条件は通常の一次不等式（最後の小問では双曲線（hyperbola）に関する不等式）になる。もう一つ大きく時間を節約できるのが、対称性（symmetry）と平行移動（translation）である。$|x|$ と $|y|$ を含む集合は両方の座標軸に関して対称になるので、一つの象限（quadrant）だけで考えて折り返せばよい。また、$x$ を $x-1$ で置き換えると、図形はそのまま右へ 1 だけ平行移動する。

## 解答

### 小問 (i)

$x$ を $-x$ に、あるいは $y$ を $-y$ に置き換えても集合は変わらないので、この集合は両方の座標軸に関して対称である。第 1 象限（$x \geq 0, y \geq 0$）では、条件は単に $x+y \leq 1$ となり、これは頂点 $(0,0), (1,0), (0,1)$ をもつ三角形である。これを両方の軸に関して折り返すと四つの三角形が得られ、それらを合わせると一つの頂点を下にして立った正方形になる。その頂点は

$$(1,0), \quad (0,1), \quad (-1,0), \quad (0,-1).$$

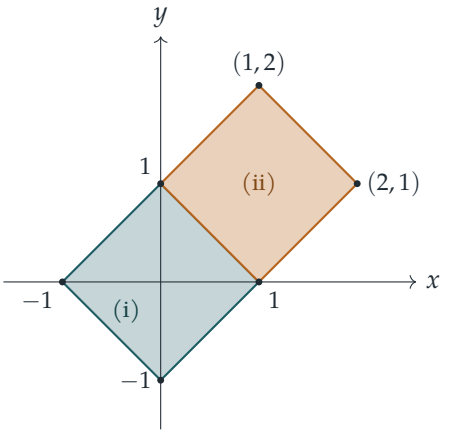
である。言い換えると、これは四つの半平面（half-plane）$\pm x \pm y \leq 1$ の共通部分である。境界も含まれ（不等式は $\leq$ である）、面積は 2 である。

**小問 (ii)**

$X = x - 1, Y = y - 1$ とおく。すると条件は $|X| + |Y| \leq 1$ となり、これは $(X, Y)$ 座標における小問 (i) そのものである。したがって、この集合は小問 (i) の正方形を $(1,1)$ だけ平行移動したものであり、中心は $(1,1)$、頂点は

$$(2,1), \quad (1,2), \quad (0,1), \quad (1,0),$$

で、直線 $x + y = 1, x + y = 3, y = x + 1, y = x - 1$ で囲まれている。この正方形は $(1,0)$ と $(0,1)$ で両方の座標軸に接する。




**小問 (iii)**

ここでも平行移動する。$X = x - 1, Y = y + 1$ とおくと、条件は

$$|X| \leq 1 + |Y|.$$

となる。これは $X$ 軸と $Y$ 軸の両方に関して、すなわち直線 $x = 1$ と $y = -1$ に関して対称である。象限 $X \geq 0, Y \geq 0$ では条件は $X \leq 1 + Y$ となり、これは $(1,0)$ を通る傾き 1 の直線 $X = 1 + Y$ より左側のすべての点を表す。折り返して考えると、この集合は二つの開いたくさび形の領域**を除いた**すべての点からなる。

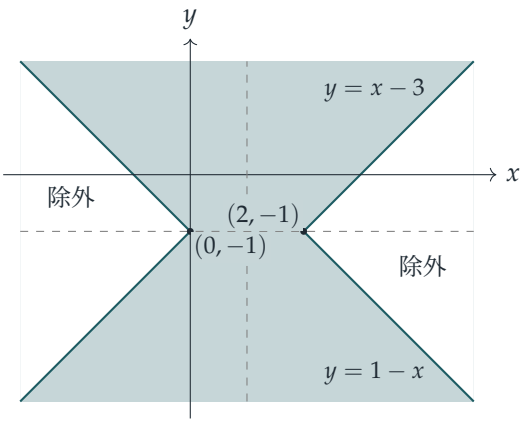
- 右側の $X > 1 + |Y|$：頂点が $(X, Y) = (1,0)$ で右に開き、$Y = \pm(X - 1)$ で囲まれた直角のくさび形の領域；
- 左側の $X < -1 - |Y|$：その鏡像で、頂点が $(-1,0)$ で左に開いた領域。

**考えてみよう** この集合は、(i) や (ii) のように有界（bounded）であろうか？

有界ではない。マイナス記号がすべてを変えてしまう。$|Y|$ を大きくすると条件は**より満たしやすく**なるので、固定した各 $Y$ に対して許される $X$ は区間 $-1 - |Y| \leq X \leq 1 + |Y|$

をなし、この区間は $|Y|$ が大きくなるにつれて広がる。特に、鉛直な直線 $X=0$（すなわち $x=1$）全体がこの集合に含まれる。

$x,y$ 座標に戻すと、頂点は $(2,-1)$ と $(0,-1)$ である。除かれる右側のくさび形は $x>2+|y+1|$ であり、$x\geq 2$ における半直線 $y=x-3$ と $y=1-x$ で囲まれる。除かれる左側のくさび形は $x<-|y+1|$ であり、$x\leq 0$ における $y=x-1$ と $y=-1-x$ で囲まれる。境界の直線そのものは集合に含まれる。直線 $y=-1$ 上では、集合はちょうど線分 $0\leq x\leq 2$ であり、ここが最も幅の狭いところである。




破線 $x=1$ と $y=-1$ が対称軸である。

**小問 (iv)**

$Y=y-2$ とおくと、条件は $|x|\,|Y|\leq 1$ となる。これは $x$ 軸と直線 $Y=0$（すなわち $y=2$）の両方に関して対称である。象限 $x\geq 0, Y\geq 0$ では次のようになる。

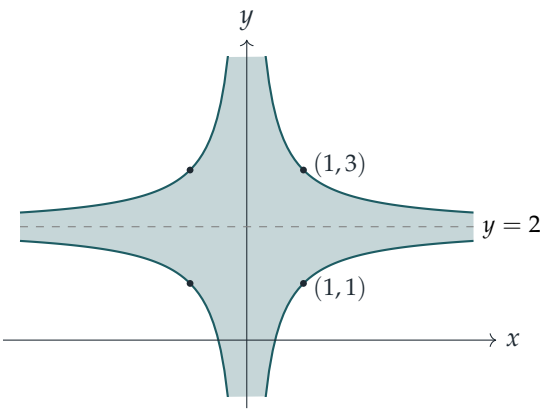
- $x=0$ ならば、条件はすべての $Y$ に対して成り立つので、$y$ 軸全体が集合に含まれる；
- $x>0$ ならば $x$ で割ってよく、条件は $0\leq Y\leq 1/x$ となる。これは双曲線 $Y=1/x$ の下側の領域である。

二つの対称軸に関して折り返すと、集合は

$$x=0,\quad \text{または}\quad 2-\frac{1}{|x|}\leq y\leq 2+\frac{1}{|x|}\ \ (x\neq 0),$$

となり、双曲線 $(y-2)x=\pm 1$ の四本の枝に挟まれた領域である。この集合は $y$ 軸全体と直線 $y=2$ 全体を含み、これらは境界曲線の漸近線（asymptote）である。形は $(0,2)$ を中心とする太いプラス記号のようである。「正方形」$|x|\leq 1, |y-2|\leq 1$ の角は境界上の点 $(\pm 1,1)$ と $(\pm 1,3)$ にあり、$|x|\to\infty$ のとき腕は $y=2$ に向かって細くなり、

$|y| \to \infty$ のとき縦の腕は $y$ 軸に向かって細くなる。この集合は有界ではない（しかも興味深いことに、面積は無限大である）。




## 検算

- いくつかの点を元の不等式で確かめる。(iii) では、$(1, 100)$ は $0 - 101 \leq 1$ を与えるので集合に含まれ（有界でないことが確認できる）、一方 $(2.01, -1)$ は $1.01 > 1$ を与え、右側の頂点のすぐ外側にある。(iv) では、$(2, 2.5)$ は $2 \times 0.5 = 1$ を与えるので境界上にあり、$(2, 2.51)$ はすぐ外側にある。
- (i) では、四つの三角形の面積はそれぞれ $\frac{1}{2}$ なので、正方形の面積は 2 である。格子点を数えると 2.002 が得られる。
- 各小問について $[-6, 6]^2$ 内の無作為な点 400,000 個を調べ、元の不等式と我々の記述（半平面、除かれるくさび形、あるいは $|y - 2| \leq 1/|x|$）を比較したところ、食い違いは一つもなかった。

## よくある間違い

- (ii) と (iii) で、平行移動の向きを逆にしてしまう。$|x - 1|$ は図形を $x = +1$ へ、$|y + 1|$ は図形を $y = -1$ へ移す。
- (iii) で、(i) からの類推で有界なひし形を描いてしまう。マイナス記号によって $|y + 1|$ の役割が逆転し、集合は有界でなくなる。
- (iv) で、$x = 0$ の場合を別に扱わずに $|x|$ で割ってしまい、$y$ 軸全体が集合に含まれるという事実を見落とす。

## STEP のその先へ

(i) の集合は「タクシー」ノルム（norm）$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$ に関する単位球（unit ball）であり、(ii) は $(1,1)$ を中心とする半径 1 の球である。ノルムが異なれば単位球の形も異なる（通常の距離では円、$\max(|x|,|y|)$ では辺が水平な正方形）。解析学（analysis）や距離空間（metric space）の最初の講義では、$\mathbb{R}^2$ 上ではこれらのノルムがすべて同じ収束（convergence）と連続性（continuity）の概念を定めることを学ぶ。Bartle と Sherbert による *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、こうした考え方に触れるのに良い本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。